Ս. Է. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

10-րդ դասարանի դասագիրք

Հանրակրթական ավագ դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար

ԵՐԵՎԱՆ

ՏԻԳՐԱՆ ՄԵԾ
ՓԲԸ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

2009

ՀԱՍՏԱՏՎԱԾ Է ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՑ

ՀՏԴ 373.167.1:514(075)
ԳՄԴ 22.151 g72
Հ 177

Մասնագիտական խմբագիր՝ Լ. Ա. Մաթևոսյան

Հակոբյան Ս.Է.
Հ 177 Երկրաչափություն: Դասագիրք հանրակրթական դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի 10-րդ դասարանի համար/
- Եր.: Տիգրան Մեծ, 2009. - 120 էջ:

ԳՄԴ 22.151 g72

ISBN 978-99941-0-316-4

Առաջաբան

Ավագ դպրոցի երկրաչափության դասընթացի բովանդակությունը հիմնականում վերաբերում է տարածաչափությանը: Վերջինս երկրաչափության այն բաժինն է, որն ուսումնասիրում է տարածական պատկերների ձևերը, հատկությունները, դասավորությունները, դրանց վերաբերող մեծությունները: Տարածական պատկերների մասին նախնական գիտելիքներ տրվել են դեռևս միջին դպրոցի դասընթացում: Սակայն դրանք եղել են ընդամենը ծանոթություններ երկրաչափական որոշ մարմինների՝ բազմանիստերի ու պտտական մարմինների, դրանց վերաբերող մեծությունների հաշվման գործնական եղանակների մասին: Իսկ այժմ խնդիր է դրվում հանգամանորեն ուսումնասիրել տարածական պատկերներն ու դրանց առնչությունները՝ իրենց բազմազանությամբ և առանձնահատկություններով:

Դասագիրքը հասցեագրվում է հատկապես այն դպրոցականներին, ովքեր երկրաչափությունն ուսումնասիրելու են որպես զուտ հանրակրթական (այլ ոչ թե նախամասնագիտական) առարկա: Այդ պատճառով խնդիր չի դրվել խորացնելու ուսումնական նյութի բովանդակությունը: Հակառակը, շեշտադրումներն ավելի շատ կատարվել են սովորողների մտահորիզոնի ընդլայնման, նրանց տարածական պատկերացումների ու երևակայության և, անշուշտ, գործնական-կիրառական կարողությունների զարգացման վրա: Հնարավորինս պարզեցվել է ոչ միայն տեսական նյութը, այլև խնդիրների համակարգը, փոխարենն ավելի հանգամանորեն են քննարկվում հումանիտար և կիրառական նշանակություն ունեցող հարցերն ու խնդիրները: Միաժամանակ, առավել հետաքրքրասերների համար դասագրքի յուրաքանչյուր գլխի վերջում բերված են լրացուցիչ հարցեր և խնդիրներ, իսկ գրքի վերջում՝ օժանդակ նյութեր՝ «Հիմնավորենք մեր գիտելիքները» խորագրի տակ (դրանց համարակալումն առանձնանում է «Ա» տառի նշումով, օրինակ՝ Ա-1, Ա-2 և այլն):

Դասընթացն արդյունավետ սկսելու համար նպատակահարմար է նախապես անդրադառնալ հարթաչափության հիմնական հասկացություններին ու թեորեմներին, վերհիշել հիմնական բանաձևերը: Դրան զուգընթաց՝ կարևոր է ավելի հիմնավոր ծանոթանալ այն նյութի բովանդակությանը, որն այստեղ ներկայացված է ներածական զրույցներում:

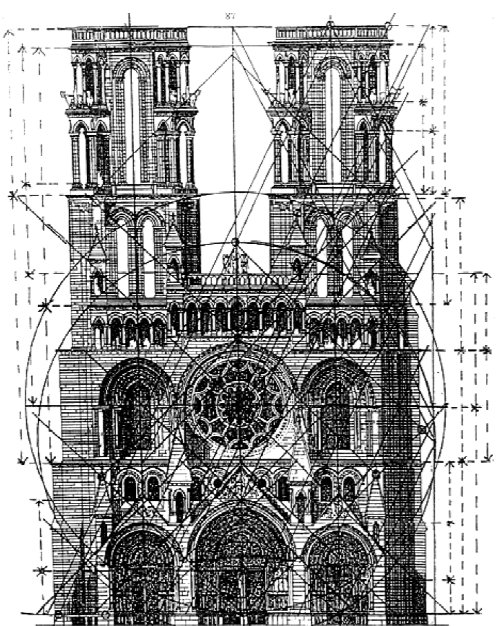
Ներածական զրույցներ

1. Երկրաչափության և նրա ուսումնասիրության մասին

Ողջ բնության ու նրբագեղ երկնքի պատկերանշային
արտացոլումը երկրաչափության արվեստն է:

Կեպլեր

Երկրաչափությունը հազարամյակների պատմություն ունի, և այն որոշակի տեղեկություններ է կրում մարդկային մտքի ու մշակույթի պատմության մասին: Երկրաչափությունը ծագել է գործնական ու կիրառական խնդիրներից, իսկ այնուհետև աստիճանաբար ընդլայնել ճանաչողության ու կիրառության ոլորտները: Հողաչափումների, ճանապարհաշինության, քաղաքաշինության, քարտեզագրության, արհեստների և ժամանակակից տեխնիկական սարքավորումների հիմքում ընկած են երկրաչափական պատկերացումները: Ավելին, քանդակագործության, ճարտարապետության, կիրառական արվեստների ստեղծագործությունները կատարվում և ընկալվում են տարածական պատկերացումների շնորհիվ: Այլ խոսքով՝ արտադրության, գիտության, տեխնիկայի, արվեստի բնագավառներում և ամենօրյա կյանքում մեզ ուղեկցում են երկրաչափության կիրառությունները, գործունեությունը երկրաչափության օրենքներով: Եվ պատահական չէ, որ երկրաչափության մասին տարածվել են բազմաթիվ թևավոր ասույթներ, ինչպես, օրինակ՝ **երկրաչափությունը ճարտարապետության քերականությունն է** *(նկար 1-ում պատկերված է Փարիզի Աստվածամոր տաճարը՝ կառուցված ըստ երկրաչափական օրինաչափությունների):*



Նկ. 1

Երկրաչափության համար բնորոշ է այն, որ նրանում սերտորեն փոխկապակցված են պատկերային ընկալումներն ու ճշգրիտ տրամաբանությունը: Երկրաչափական յուրաքանչյուր պնդում (աքսիոմ, սահմանում, թեորեմ, խնդիր) արտահայտման մեջ կրում է այդ երկու բաղադրիչը՝ տարածական պատկերացումները և տրամաբանական ձևակերպումները:

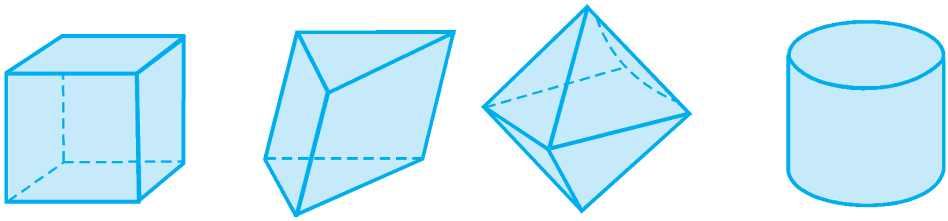
Պատկերայնությունն ավելի հատկանշական է արվեստին, իսկ տրամաբանական ճշգրտությունը՝ գիտությանը: Այսպիսով, երկրաչափությունը բացառիկ և *կատարյալ բնագավառ է, որում տրամաբանական մտածողությունն ուղեկցվում է համարժեք պատկերային ընկալմամբ: Այդ առումով՝ երկրաչափություն ուսումնասիրելիս, գործ ունենալով սահմանումների, թեորեմների կամ տարբեր խնդիրների հետ, կարևոր է նախ և առաջ հասկանալ դրանց բովանդակությունը: Իսկ դրա համար պետք է դիտարկվող պատկերը «տեսնել» մտքով և արտահայտել գծապատկերով: Դրա շնորհիվ կզարգանա մեր երևակայությունը, պատկերային մտածողությունը, ի վերջո՝ կկարողանանք ճիշտ կողմնորոշվել տեղանքում ու տարածության մեջ:*

Երկրաչափության ուսումնասիրությունը նպաստում է նաև հաղորդակցական կարողությունների զարգացմանը: Երկրաչափական պատկերներ հետազոտելիս, երբ դրանց վերաբերյալ կշռադատություններ ենք անում, զարգանում են մեր լեզվական հմտությունները: Մասնավորապես՝ հարստանում է ակտիվ բառապաշարը, սովորում ենք արտահայտվել ճշգրիտ, հստակ, հակիրճ և հասկանալի*: Դրա հետ մեկտեղ՝ ձևավորվում և զարգանում են գծապատկերներ, նշաններ, պայմանանշաններ գործածելու հմտությունները: Դրանց շնորհիվ էապես ընդլայնվում են մեր հաղորդակցական հնարավորությունները. չէ՞ որ երբեմն տեղին գործածվող մի գծապատկերը կամ պայմանանշանը կարող է շատ ավելի ընկալելի տեղեկություններ հաղորդել, քան, ասենք, բառային երկարաշունչ շարադրանքը:*

Երկրաչափություն ուսումնասիրելու կարևորության մասին խոսել են շատ անվանի մարդիկ: Դեռևս Անտիկ աշխարհի հանճարեղ մտածողներից մեկը՝ Պլատոնը, կատարյալ պետություն ստեղծելու խնդիրներ քննարկելիս բացահայտել է, որ «Երկրաչափություն ուսումնասիրող մարդու համար ավելի հեշտությամբ է կատարվում այլ գիտությունների յուրացումն ու մտաբերությունը»: *Եվ այդ գիտակցությամբ էլ բոլոր ժամանակներում երկրաչափությունը դիտվել է որպես սերունդների կրթությանը ծառայող անզուգական միջոց:*

2. Գաղափար հասկացության մասին

Կշռադատություններ անելիս, երբ խոսում ենք որևէ առարկայի մասին, նրա որոշ հատկանիշներ անտեսում ենք՝ համարելով դրանք տվյալ դիտարկման համար ոչ էական: Միաժամանակ՝ որոշակի այլ հատկանիշներ համարում ենք էական, որովհետև առանց այդ հատկանիշների չէինք կարողանա տվյալ առարկան առանձնացնել ուրիշ առարկաներից: Օրինակ, երբ դիտում ենք նկար 2-ը և ասում, որ (ա) նկարում պատկերվածը խորանարդ է, ապա այդ ընթացքում նկարի հիման վրա մենք մտքով վերականգնում ենք առարկան ու պարզում, որ այն 6 նիստ ունեցող այնպիսի բազմանիստ է, որի բոլոր նիստերը քառակուսիներ են*: Այս նշված հատկանիշներն էլ հենց խորանարդի էական հատկանիշներն են: Իսկ տվյալ մարմնի, ասենք, զանգվածը, նյութի տեսակը, գույնը երկրաչափական դիտարկման համար էական հատկանիշներ չեն, և մենք դրանցից մտովի վերանում ենք: Նմանապես երկրաչափական այլ պատկերներ ևս (օրինակ՝ պրիզման (բ), ուղղանիստը (գ), գլանը (դ) և այլն) ներկայացնում են այնպիսի առարկաներ, որոնց համար էական են տարածա-*



ա) *բ)* *գ)* *դ)*

Նկ. 2

կան ձևը, տարրերի փոխդասավորությունն ու դրանց առնչությունները: Իհարկե, կախված ուսումնասիրության նպատակից՝ նույն առարկայի համար էական համարվող հատկանիշները կարող են և ուրիշ լինել: Օրինակ՝ բնագիտական հետազոտության համար մարմնի զանգվածը, գույնը, նյութի տեսակը կարող են դիտվել որպես էական հատկանիշներ: Սակայն կարևոր է նկատել, որ այդ դեպքում նույնպես առարկայի ինչ-որ այլ հատկանիշներ (օրինակ՝ գինը), այնուամենայնիվ, անտեսվում են, այսինքն՝ համարվում են ոչ էական:

Այսպիսով, կշռադատություններ անելիս իրական առարկաները մենք մտքով «զտում ենք» որոշ՝ ոչ էական համարվող հատկանիշներից և դարձնում զուտ մտքի առարկա: Դրանք արդեն վերացական առարկաներ են, որոնք, սակայն, ամբողջությամբ կտրված չեն իրականությունից և իրականության մեջ ունեն իրենց նախատիպը: Ուսումնասիրելով այդ վերացական առարկաները՝ մենք կարևոր տեղեկություններ ենք ստանում իրական առարկաների մասին:*

Այսպիսով, մենք գործ ենք ունենում հասկացությունների *հետ, այսինքն՝* մտածական այնպիսի առարկաների հետ, որոնք վերցված են էական հատկանիշներով: *Հասկացությունը, փաստորեն, մենք ընկալում ենք որպես իդեալական առարկա, որը, պատկերավոր ասած, այն բոլոր իրական առարկաների ներկայացուցիչն է, որոնք օժտված են նույն էական հատկանիշներով: Օրինակ՝* տետրի թուղթը, սենյակի հատակը, պատը *իրական առարկաներ են, որոնք որպես երկրաչափական պատկերներ ներկայացվում են «*ուղղանկյուն*» հասկացությամբ: Նույնպիսի օրինակներ կարելի է բերել երկրաչափությունից մեզ հայտնի մյուս հասկացությունների վերաբերյալ:*

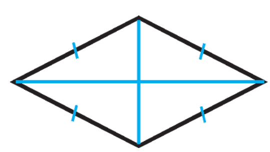
Նկատենք, որ հասկացության կազմավորման ընթացքը նման է գեղարվեստական գրականության մեջ գործող անձանց՝ կերպարների ստեղծմանը: Ե՛վ մեկ, և՛ մյուս դեպքում մտքի տվյալ առարկայի մասին մենք կարողանում ենք դատողություններ անել միայն այնպիսի հատկանիշների հիման վրա, որոնցով այն ներկայացված է: Կերպարը ներկայացվում է գրական ստեղծագործության շրջանակներում, իսկ հասկացությունը՝ որևէ տեսության շրջանակներում:

* Իրական և վերացական առարկաների համեմատության տիպական օրինակ է Երկրի որևէ տարածքի *տեղանքը* և նրա *քարտեզը*: Քարտեզում պատկերվում են տեղանքի միայն կարևոր տարրերը, տեղանքի խայտաբղետ բազմազանության բաղադրիչներից շատերը քարտեզի վրա անտեսված են (յուրաքանչյուր մանրուք չէ, որ քարտեզում պետք է տեղ ունենա): Եվ հենց դրա շնորհիվ է, որ քարտեզի օգնությամբ կարողանում ենք կողմնորոշվել ցանկացած, այդ թվում և անծանոթ տեղանքում:

3. Երկրաչափության հիմնական հասկացությունների մասին

Ինչպես յուրաքանչյուր տեսություն, այնպես էլ երկրաչափությունն ունի իր հասկացությունների համակարգը: Հասկացությունները, սովորաբար, ներմուծվում են սահմանման միջոցով: Սահմանել հասկացությունը՝ նշանակում է բացահայտ ներկայացնել այն էական հատկանիշները, որոնցով որոշվում է տվյալ առարկան: Յուրաքանչյուր հասկացության սահմանման համար գործածվում են որոշ՝ այլ հասկացություններ, որոնք մինչ այդ արդեն սահմանվել են: Որպես օրինակ վերցնենք, ասենք, շեղանկյան սահմանումը. «Շեղանկյուն կոչվում է այն զուգահեռագիծը, որի բոլոր կողմերը հավասար են» (նկ. 3): Այստեղ, ինչպես տեսնում ենք, գործածվել են «զուգահեռագիծ», «հավասար կողմեր» հասկացությունները: Վերջիններիս սահմանման համար նույնպես անհրաժեշտ են այլ հասկացություններ, իսկ դրանց համար՝ ուրիշ հասկացություններ, և այդպես շարունակ: Եթե փորձենք հաջորդաբար ներկայացնել յուրաքանչյուր քայլում գործածվող հասկացությունների սահմանումները, կտեսնենք, որ շատ հեռու գնալ չենք կարող: Բանն այն է, որ ըստ սահմանման կանոնների՝ անթույլատրելի է **կրկնություն ու շրջապտույտ** (*այսինքն՝* երբ հասկացությունը սահմանվում է մի այնպիսի հասկացությամբ, որի սահմանման մեջ այն արդեն օգտագործվել է):

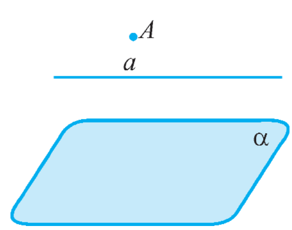
Ուրեմն՝ հասկացությունների հաջորդաբար կատարվող սահմանումների համար լինելու է ինչ-որ ելակետ: Այսինքն՝ պետք է ունենալ սկզբնական այնպիսի հասկացություններ, որոնք ուրիշ հասկացությունների միջոցով չեն սահմանվում: Դրանք կոչվում են **հիմնական հասկացություններ**, *և ամեն մի տեսության համար այդպիսի հասկացություններ ունենալն անխուսափելի է: Օրինակ՝ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում որպես հիմնական հասկացություններ են գործածվում «թիվ», «բազմություն», «տարր», «պատկանել», իսկ հարթաչափության մեջ՝ «կետ», «ուղիղ», «միջև ընկած» հասկացությունները:*



Նկ. 3

Տարածաչափության մեջ նույնպես գործածվում են հիմնական հասկացություններ՝ **կետը, ուղիղը, հարթությունը** (նկ. 4): *Դրանց մասին մենք արդեն ունենք նախնական՝ երևակայական պատկերացումներ:*

Կետը *պատկերացնում ենք որպես փոքրագույն մասնիկների այնպիսի իդեալականացում, երբ ամբողջությամբ անտեսում ենք նրանց չափերը: Էվկլիդեսն իր հռչակավոր «Սկզբունքներ» աշխատության մեջ կետը ներկայացրել է որպես «ինչ-որ մի բան, որի մասը ոչինչ է», այսինքն՝ կետն այն է, որ մասեր չունի:*



Կետի (A), ուղղի (a), հարթության (α) պատկերումը
Նկ. 4

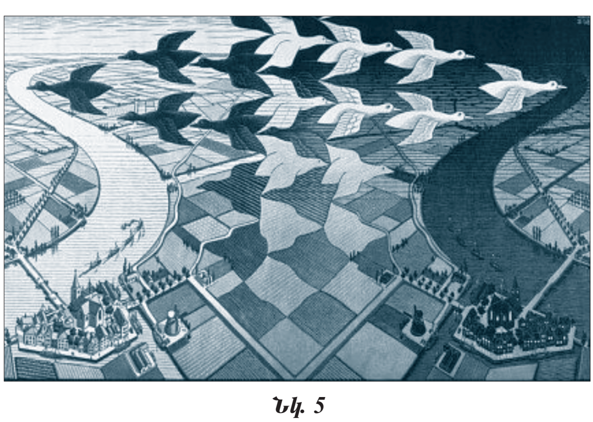
Ուղիղը *պատկերացնում ենք որպես ձգված, բարակ թելի այնպիսի իդեալականացում, երբ անտեսում ենք նրա հաստությունը և ընդունում, որ երկու կողմից անվերջ շարունակելի է: Ուղիղով տարածվում է լուսային ճառագայթը:*

Հարթությունը *պատկերացնում ենք որպես սեղանի, պատի կամ ջրի հարթ մակերևույթի այնպիսի իդեալականացում, երբ ընդունում ենք, որ այն բոլոր կողմերում* *անսահմանափակ փռած է: Ընդ որում՝ այդ հարթ մակերևույթը պատկերացնում ենք որպես շատ բարակ «թիթեղ» կամ «սավան», որի հաստությունն անտեսվում է:*

Սրանք մեր ակնառու, մոտավոր նկարագրական պատկերացումներն են կետի, ուղղի և հարթության մասին: Սակայն երկրաչափության մեջ այդքանով չենք բավարարվելու և ավելի ենք հստակեցնելու այդ պատկերացումները:

Հարցեր մտորելու և խմբային քննարկումների համար

1. Հայտնի է, որ Պլատոնն իր դպրոցի (հետագայում դրան անվանեցին *Ակադեմիա)* մուտքի մոտ գրել է. «*Երկրաչափություն չիմացողն այս դռնից ներս չմտնի*»: Ձեր կարծիքով, ինչո՞ւ է Պլատոնն իր դպրոցի մուտքի համար ընտրել այդպիսի «անցագիր»:
2. Ինչպե՞ս եք մեկնաբանում «Երկրաչափությունը ճարտարապետության քերականությունն է» թևավոր ասույթը: Ուրիշ ի՞նչ ասույթներ գիտեք երկրաչափության վերաբերյալ:
3. Ինչո՞վ են տարբերվում ձեր ուսումնասիրած երկրաչափական պատկերները շրջապատում հանդիպող համանման իրական առարկաներից:
4. Էվկլիդեսի՝ «Կետն այն է, որի մասը ոչինչ է» հանրահայտ ձևակերպումն ընդունված չէ անվանել որպես «կետ» հասկացության ճշգրիտ սահմանում: Ձեր կարծիքով, այդ ձևակերպումն ինչո՞վ է «թերի» սահմանում կոչվելու համար:
5. Ամեն անգամ, երբ հնարավոր (կամ անհրաժեշտ) չի լինում տալ որևէ հասկացության ճշգրիտ սահմանումը, օգտագործվում են սահմանմանը փոխարինող տարբեր հնարներ, օրինակ՝ *մատնանշումը, նկարագրությունը, բնութագրումը*, ինչպես նաև *համեմատումը, լուսաբանումն օրինակով*: Ձեզ ի՞նչ է հայտնի դրանց վերաբերյալ: Կարո՞ղ եք բերել օրինակներ մաթեմատիկայի նախորդ տարիների դասընթացից, երբ այս կամ այն հասկացության սահմանման փոխարեն օգտվել են այդ հնարներից:
6. Դիտեք նկար 5-ը: Փորձեք արտահայտել որևէ դատողություն, որը, ձեր կարծիքով, կարևոր է այդ նկարը բնութագրելու համար: Համեմատեք ձեր ընկերների ներկայացրած դատողությունները և փորձեք անվանում ընտրել այդ նկարի համար:



Նկ. 5

ԳԼՈՒԽ I

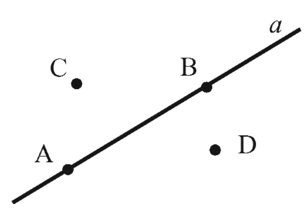
ՈՒՂԻՂՆԵՐԸ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

§ 1 ՈՒՂՂԻ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՏՐՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ

1.1. Տարածաչափության աքսիոմները

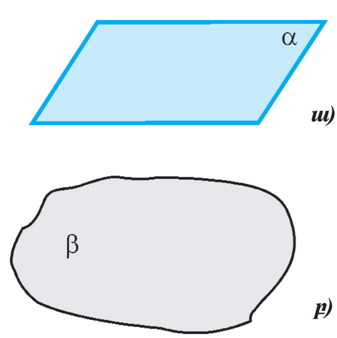
Կետը, ուղիղը և հարթությունը, ինչպես արդեն ասել ենք, տարածաչափության հիմնական հասկացություններն են: Ինչպես որ ուղղի վրա կան անվերջ շատ կետեր, այնպես էլ տարածության մեջ կան անվերջ շատ կետեր, ուղիղներ և հարթություններ: Տարածաչափության մեջ կետերի և ուղիղների նշանակումները կատարվում են այնպես, ինչպես հարթաչափության մեջ: Այսինքն՝ կետերը նշանակվում են լատինական այբուբենի մեծատառերով (*A, B, C* և այլն), իսկ ուղիղները՝ փոքրատառերով (*a, b, c* և այլն):

Հարթաչափության համեմատությամբ՝ տարածաչափության հիմնական նոր հասկացություն է *հարթությունը*: Յուրաքանչյուր հարթության մեջ ընկած են որոշ կետեր, սակայն տարածության ոչ բոլոր կետերն են ընկած նույն հարթության մեջ: Այսինքն՝ ցանկացած հարթության համար կան այնպիսի կետեր, որոնք ընկած են այդ հարթության մեջ, և այնպիսի կետեր, որոնք ընկած են հարթությունից դուրս: Հարթությունները նշանակվում են հունական այբուբենի փոքրատառերով՝ α, β, γ և այլն:



Ուղիղ և կետեր
Նկ. 6

Գծագրելիս կետը և ուղիղը պատկերվում են այնպես, ինչպես հարթաչափության մեջ (նկ. 6), իսկ հարթությունը պատկերվում է զուգահեռագծի կամ կամայական տիրույթի տեսքով (նկ. 7, ա,բ):



Նկ. 7

Ընդունվում է, որ տարածության մեջ յուրաքանչյուր հարթության համար ճշմարիտ են բոլոր այն աքսիոմները (հետևաբար նաև թեորեմները), որոնք հայտնի են հարթաչափությունից:

Տարածաչափության աքսիոմների ցանկը կազմելու համար հարթաչափության աքսիոմների ցանկին ավելացվում են նոր աքսիոմներ: Ներկայացնենք դրանցից մի քանիսը:

Աքսիոմներից մեկը վերաբերում է ուղղի տրման եղանակին:

A-1 (ուղղի աքսիոմը). ***Տարածության ցանկացած երկու կետով* անցնում է ուղիղ և այն էլ՝ միայն մեկը*** *(նկ. 8)*:

Այս աքսիոմին համանման աքսիոմ մեզ հայտնի է հարթաչափությունից: Ուրեմն՝ տարածության մեջ նույնպես տրված երկու կետերով անցնում է միայն մեկ ուղիղ, այսինքն՝ ուղիղը կհամարենք տրված, եթե տրված են նրա որևէ երկու կետերը: Դրա հիման վրա էլ ուղիղը կարող ենք նշանակել նաև երկու մեծատառով (օրինակ՝ *AB* ուղիղը նկ. 6-ում):

Մյուս աքսիոմը վերաբերում է հարթության տրման եղանակին:

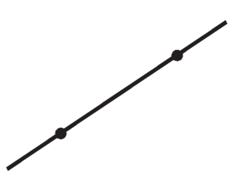
A-2 (հարթության աքսիոմը). ***Մի ուղղի վրա չգտնվող ցանկացած երեք կետով անցնում է հարթություն և այն էլ՝ միայն մեկը*** *(նկ. 9)*:

Նկատենք, որ երկու կետերով, կամ մի ուղղի վրա գտնվող երեք կետերով անցնում են մեկից ավելի (անվերջ շատ) հարթություններ, այսինքն՝ այդ դեպքում միակ հարթություն չի որոշվում: Այդպիսի ակնառու օրինակ է երկու ծխնիով կախված դուռը, որը կարող է գտնվել տարբեր դիրքերում (նկ. 10):

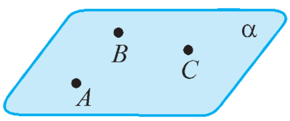
Մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերով կարող է տրվել միայն մեկ հարթություն: Դրա հիման վրա էլ հարթությունը հաճախ նշանակվում է նաև նրա երեք կետերի տառերով (օրինակ՝ *ABC* հարթությունը նկ. 9-ում):

Որպես աքսիոմ է ընդունվում նաև հետևյալ պնդումը:

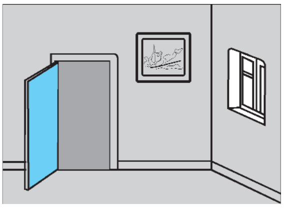
A-3 (հարթությունների հատման աքսիոմը). ***Եթե երկու հարթություններն ունեն ընդհանուր կետ, ապա նրանք ունեն ընդհանուր ուղիղ, որի վրա ընկած են այդ հարթությունների բոլոր ընդհանուր կետերը*** *(նկ. 11)*:



Նկ. 8



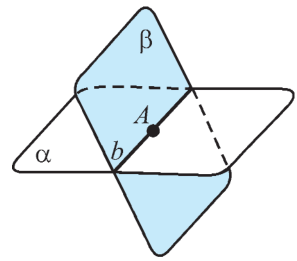
Նկ. 9



Նկ. 10

* *Հիշե՛ք.* այստեղ և հետագայում ասելով «երկու կետ», «երեք կետ», նմանապես՝ «երկու ուղիղ», «երկու հարթություն» և այլն, կհասկանանք, որ դրանք տարբեր կետեր, տարբեր ուղիղներ, տարբեր հարթություններ են:

Այս աքսիոմով, մասնավորապես, ներկայացվում է ուղղի տրման ևս մեկ եղանակ. ուղիղը կարող է տրվել որպես երկու հարթությունների հատման գիծ: Եթե α և β հարթությունների հատման գիծը b ուղիղն է, ապա այդ փաստը պայմանանշաններով գրառվում է նաև այսպես՝ $b=\alpha\cap\beta$:



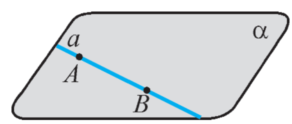
Նկ. 11

Աքսիոմների ցանկում ավելացնենք ևս մեկ աքսիոմ:

A-4 (ուղղի և հարթության աքսիոմը). ***Եթե ուղղի երկու կետերն ընկած են հարթության մեջ, ապա ուղղի բոլոր կետերն ընկած են այդ հարթության մեջ*** *(նկ. 12):*

Այդ դեպքում նաև ասում են, որ *հարթությունն անցնում է ուղիղով*:

Եթե A և B կետերն ընկած են α հարթության մեջ ($A\in\alpha$ *և* $B\in\alpha$), ապա «AB ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ» նախադասությունը համառոտ գրառվում է այսպես՝ $AB\subset\alpha$:



Նկ. 12

Նշենք, որ տարածաչափության աքսիոմների ցանկը բերված աքսիոմներով չի սպառվում: Բայց մենք բոլորը չենք ներկայացնի, քանի որ նպատակ չունենք երկրաչափության ուսումնասիրությունը կատարել որպես զուտ աքսիոմակարգով կառուցվող տեսություն:

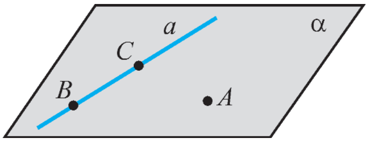
1.2. Հետևություններ հարթության տրման եղանակների մասին

Որևէ պնդում ապացուցելու համար այն պետք է բխեցնել այնպիսի պնդումներից, որոնց ճշմարիտ լինելն արդեն հայտնի է (ընդունված է կամ ապացուցված): Ապացուցման ընթացքում օգտագործվող այդպիսի պնդումները կոչվում են *ապացուցման հիմքեր* կամ *փաստարկներ*: Հասկանալի է, որ փաստարկները՝ իրենք, պետք է լինեն *ճշմարիտ*: Որպես ապացուցման փաստարկ կարող են ծառայել *աքսիոմները*, դրանցից բխեցված պնդումները՝ *թեորեմները*, հասկացությունների *սահմանումները*, իսկ խնդիրներ լուծելիս՝ նաև խնդրի *պայմանը* (փաստարկների մասին մենք կխոսենք նաև դասընթացի հետագա շարադրանքում):

Այժմ ապացուցենք երկու թեորեմ, որոնք վերաբերում են հարթության տրման եղանակներին: Դրանք անմիջականորեն բխում են տարածաչափության աքսիոմներից և դրա համար էլ կոչվում են նաև աքսիոմների *հետևանքներ*:

Հետևանք - 1. ***Ուղիղով և նրա վրա չգտնվող կետով անցնում է հարթություն և այն էլ՝ միայն մեկը:***

Ապացուցում. Ընդունենք, որ տրված է a ուղիղը և նրա վրա չգտնվող A կետը (նկ. 13): Այդ ուղղի վրա վերցնենք կամայական երկու կետ՝ B-ն և C-ն: Դիտարկվող A, B և C կետերը չեն գտնվում մի ուղղի վրա: Հետևաբար, ըստ A-2 աքսիոմի,

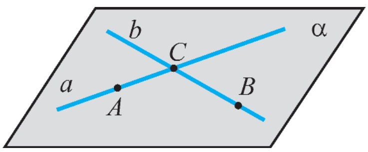


Նկ. 13

գոյություն ունի այդ կետերով անցնող հարթություն, ընդ որում՝ միայն մեկը (α հարթությունը նկ. 13-ում): Մնում է նկատել, որ α հարթությունն անցնում է a ուղիղով: Իսկ դա անմիջապես բխում է A-4 աքսիոմից (հիշենք, որ a ուղղի B և C կետերը գտնվում են α հարթության մեջ):

Այսպիսով, իրոք, α հարթությունն անցնում է a ուղիղով ու A կետով, և այն միակն է: Հետևանք 1-ը ապացուցված է:

Հետևանք - 2. ***Երկու հատվող ուղիղներով անցնում է հարթություն և այն էլ՝ միայն մեկը:***



Նկ. 14

Ապացուցում. Ընդունենք, որ տրված են a և b ուղիղները, իսկ C-ն նրանց հատման կետն է (նկ. 14): a և b ուղիղների վրա վերցնենք C-ից տարբեր մեկական կետ՝ համապատասխանաբար A-ն և B-ն:

Ապացուցման մնացած քայլերը կարող եք կատարել ինքնուրույն՝ օգտագործելով հետևյալ դատողությունները.

ա) A, B, C կետերը չեն գտնվում մի ուղղի վրա,

բ) ABC հարթությունը միակն է, որն անցնում է A, B, C կետերով,

գ) a-ն միակ ուղիղն է, որ անցնում է A և C կետերով, իսկ b-ն՝ միակ ուղիղը, որն անցնում է B և C կետերով,

դ) a և b ուղիղներից յուրաքանչյուրի երկու կետեր գտնվում են ABC հարթության մեջ,

ե) ABC հարթությունն անցնում է a և b ուղիղներով:

Նկատենք, որ հետևանք 2-ը կարելի է ապացուցել նաև այլ կերպ՝ օգտագործելով հետևանք 1-ը: Փորձեք դա նույնպես կատարել ինքնուրույն:

Պարզաբանում

Ամփոփելով հարթության վերաբերյալ աքսիոմներն ու նրանց հետևանքները՝ տեսնում ենք, որ հարթությունը կարող է տրվել երեք եղանակով.

1) մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերով,

2) ուղիղով և նրա վրա չգտնվող կետով,

3) երկու հատվող ուղիղներով:

Այս երեք եղանակներից մեկը ներկայացվում է աքսիոմով, իսկ մյուս երկուսը բխեցվում են որպես հետևանք:

Ծանոթություն

Պարտադիր չէ, որ ընդունված աքսիոմը վերաբերի հարթության տրման հենց 1-ին եղանակին: Նույն հաջողությամբ որպես աքսիոմ կարելի էր վերցնել 2-րդ, կամ էլ 3-րդ եղանակին վերաբերող պնդումը: Այդ դեպքում հարթության տրման 1-ին եղանակը կբխեր որպես հետևանք: Եվ կան երկրաչափության բազմաթիվ այլ ձեռնարկներ, որոնցում այդպես էլ արվում է: Իսկ վերջնարդյունքը դրանից չի փոխվում, որովհետև հետագա ապացուցումներում որպես փաստարկ հավասարապես կարող են գործածվել և՛ աքսիոմները, և՛ հետևանքները:

1.3. Զրույց աքսիոմի և աքսիոմակարգի մասին

(Լրացուցիչ ընթերցանության նյութ)

Առարկաների, երևույթների կամ իրադարձությունների վերաբերյալ դատողություններ արտահայտելիս ծագող սկզբունքային հարցերից մեկն այն է, թե արդյոք *ճշմարի՞տ են այդ դատողությունները, ինչո՞վ է երաշխավորվում դրանց ճշմարիտ լինելը*: Գիտական ճանաչողության հազարամյակների փորձը հաստատում է, որ կիրառական արժեք ունեն միայն ճշմարիտ գիտելիքները: Սակայն ինչպե՞ս խուսափել խաբկանքից ու կեղծ պատրանքներից:

Ճշմարտության բացահայտման հարցում մարդկային քաղաքակրթությունը որոնումներով լի ճանապարհ է անցել: Այդ ընթացքում բացառիկ դեր է ունեցել մաթեմատիկական մտածելակերպը:

Հին Հունաստանի հանճարեղ մտածող Արիստոտելի ուսմունքը սովորեցնում էր՝ *«Գիտենալ՝ նշանակում է ապացուցել»*: Իսկ ապացուցումը տրամաբանական գործողություն է, որի միջոցով դիտարկվող պնդման ճշմարիտ լինելը բխեցվում է այնպիսի պնդումներից, որոնց ճշմարիտ լինելն արդեն հաստատված է:

Այսպիսով, գիտելիքների (ճշմարիտ պնդումների) շրջանակն ընդլայնվում է քայլ առ քայլ. ունենալով որոշակի գիտելիքներ՝ դրանցից բխեցվում են նոր գիտելիքներ, այնուհետև այդ վերջինների շնորհիվ՝ ուրիշ գիտելիքներ, և այդպես շարունակ:

Իսկ որո՞նք են այն սկզբնական պնդումները, որ ընկած են բոլոր ապացուցվող պնդումների հիմքում, և ինչպե՞ս է հաստատվում հիմքում ընկած այդ պնդումների ճշմարիտ լինելը:

Հետևողական լինելու համար ասենք, որ այդ սկզբնական պնդումների ճշմարիտ լինելը չի բխեցվում որևէ պնդումից, դրանց ճշմարիտ լինելն ընդունվում է առանց ապացուցման: Այդպիսի ելակետային պնդումները կոչվում են *աքսիոմներ:*

Մի քանի աքսիոմներ մենք ձևակերպեցինք 1.1 կետում, իսկ մի քանիսը ձևակերպել էինք դեռևս հարթաչափության դասընթացում: Օրինակ՝ *ցանկացած երկու կետով անցնում է ուղիղ, այն էլ միայն մեկը:* Կամ՝ *ուղղի երեք կետերից մեկը, ընդ որում միայն մեկը, ընկած է մյուս երկուսի միջև*: Այս պնդումներն արտահայտում են կետերի և ուղիղների որոշակի հատկություններ, որոնք համարվում են այնքան ակնհայտ, որ կասկածներ չեն հարուցում: Այսինքն՝ աքսիոմներն արտահայտում են արժանահավատ տեղեկություններ հիմնական հասկացությունների վերաբերյալ և դրանով հիմք են հանդիսանում հաջորդ պնդումների ճշմարիտ լինելը ցույց տալու համար:

Այսպիսով, գիտելիքների բացահայտման և ներկայացման մաթեմատիկական մոտեցումը հետևյալն է. նախ հստակ և բացահայտ ձևակերպվում են այն սակավաթիվ պնդումները (աքսիոմները), որոնք ընդունվում են որպես ճշմարիտ, և այնուհետև դրանց հիման վրա տրամաբանության օրենքների միջոցով *բխեցվում են* մնացած բոլոր ճշմարիտ պնդումները:

Գիտելիքների համակարգի այդպիսի ճշգրիտ և կանոնակարգված կառուցման եղանակը մատնանշել է ինքը՝ Արիստոտելը: Եվ մարդկային պատմության ընթացքում այդ եղանակով կառուցվող գիտություններից առաջինը եղել է հենց երկրաչափությունը, իսկ նրա գլխավոր ճարտարապետն ու կառուցողը՝ Էվկլիդեսը: Էվկլիդեսյան երկրաչափությունն ավելի քան երկու հազար տարի շարունակ դիտվել է որպես տրամաբանական կատարելության լավագույն նմուշ: Գիտելիքների ծավալման այդ եղանակին հետագայում հետևել են ոչ միայն մաթեմատիկական գրեթե բոլոր տեսությունները, այլև գիտության բազմաթիվ այլ բնագավառներ:

Էվկլիդես
(մ.թ.ա. III դար)

Էվկլիդեսի կյանքի մասին, ցավոք, մեզ քիչ տեղեկություններ են հասել: Հայտնի են նրա ժամանակակիցներից մեկի հիշողությունները, ըստ որոնց՝ Էվկլիդեսը եղել է բացառիկ ազնիվ, խաղաղ և համեստ մարդ, ում խորթ են եղել պարծենկոտությունն ու էգոիզմը: Նա գերադասում էր խոսել ոչ թե իր, այլ երկրաչափության մասին: Փոխարենը՝ ուրիշներն էին ավելի շատ խոսում նրա մասին, ավելի ճիշտ՝ նրա «Սկզբունքների» մասին: Եվ «Սկզբունքները» ոչ միայն զրույցի թեմա էր, այլ շատ ավելին. *մարդու կրթվածությունը որոշվում էր նրանով, թե ինչքանով է նա ծանոթ «Սկզբունքներին»:*

Էվկլիդեսի իմաստության մասին կարելի է դատել հետևյալ պատմությունից:

Մի անգամ թագավորը, որն ուզում էր երկրաչափություն ուսումնասիրել, Էվկլիդեսին հարցնում է, թե արդյո՞ք հնարավոր չէ գտնել երկրաչափություն ուսումնասիրելու ավելի հեշտ ու չհոգնեցնող ուղի, քան նրա առաջարկած «Սկզբունքները»: Էվկլիդեսը խաղաղ ձայնով նրան պատասխանում է. *«Երկրաչափության մեջ արքայական ուղիներ չկան»*: Այս պատասխանը շատ արագ դարձավ թևավոր ասույթ:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

1. Պատկերեք հարթություն և այն նշանակեք α: **ա)** Նշեք այդ հարթության մեջ A և B կետեր, իսկ հարթությունից դուրս՝ C կետ:

բ) Բառերով արտահայտեք հետևյալ գրառումները.

$A\in\alpha$, $C\notin\alpha$, $AB\subset\alpha$, $AC\not\subset\alpha$:

գ) Համառոտ գրառեք հետևյալ նախադասությունները.

1) BC ուղիղն ընկած չէ α հարթության մեջ,
2) A-ն ընդհանուր կետ է ABC և α հարթությունների համար,
3) ABC և α հարթությունները հատվում են AB ուղիղով:

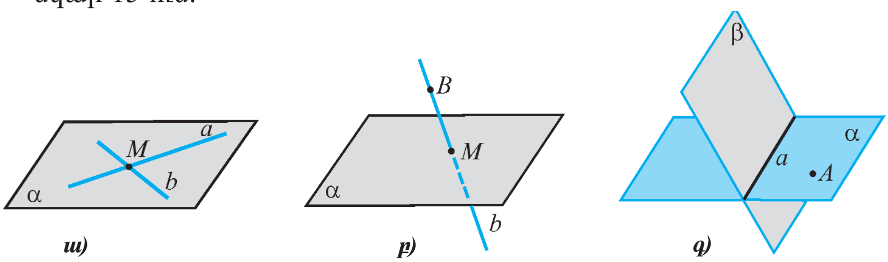
2. *A* կետը, *a* ուղիղը և α հարթությունը պատկերեք այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ պայմանները.

ա) $a \subset \alpha$ և $A \in a$,

բ) $A \in \alpha$, $A \notin a$ և $a \subset \alpha$,

գ) $A \in a$, $A \in \alpha$ և $a \not\subset \alpha$:

3. Բառերով արտահայտեք և համառոտ գրառեք այն, ինչ պատկերված է նկար 15-ում.



Նկ. 15

4. Ո՞ր դեպքում երեք կետերով միակ հարթություն չի որոշվում:

5. *A*, *B*, *C* և *D* կետերը մի հարթության մեջ չեն գտնվում: Կարո՞ղ են արդյոք՝ **ա)** այդ կետերից որևէ երեքն ընկած լինել մի ուղղի վրա, **բ)** *AB* և *CD* ուղիղները լինել հատվող: Պատասխանը հիմնավորեք:

6. Արդյոք ճշմարի՞տ է.

ա) եթե շրջանագծի երկու կետերն ընկած են հարթության մեջ, ապա շրջանագծի բոլոր կետերն ընկած են այդ հարթության մեջ,

բ) եթե զուգահեռագծի երեք գագաթներն ընկած են մի հարթության մեջ, ապա չորրորդ գագաթը ևս ընկած է նույն հարթության մեջ:

7. *A*, *B*, *C* կետերը միաժամանակ գտնվում են երկու տարբեր հարթություններ ի մեջ: Ցույց տվեք, որ այդ երեք կետերն ընկած են մի ուղղի վրա:

8. *a* և *b* ուղիղները հատվում են *A* կետում, *M* կետը չի գտնվում այդ ուղիղներով անցնող հարթության մեջ: α հարթությունն անցնում է *M* կետով և *a* ուղղով, իսկ β հարթությունը՝ *M* կետով և *b* ուղղով: **ա)** Թվարկված կետերից որո՞նք են ընդհանուր α և β հարթությունների համար: **բ)** Ինչպե՞ս որոշել α և β հարթությունների հատման գիծը:

9. α և β հարթությունները հատվում են *m* ուղղով: *a* ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ և հատում է β հարթությունը: Արդյոք կհատվե՞ն *a* և *m* ուղիղները: Ինչո՞ւ:

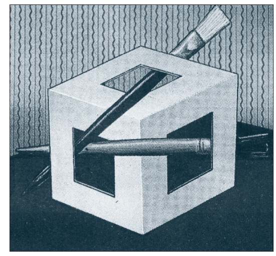
10. *a* և *b* ուղիղները հատվում են *A* կետում: Արդյոք ճշմարի՞տ է՝ **ա)** *A* կետով անցնող բոլոր ուղիղները գտնվում են մի հարթության մեջ, **բ)** *a* և *b* ուղիղները *A* կետից տարբեր կետերում հատող բոլոր ուղիղները գտնվում են մի հարթության մեջ:

11. Տրված են չորս կետեր: Քանի՞ հարթություն է հնարավոր տանել այնպես, որ այն անցնի այդ կետերից առնվազն երեքով (դիտարկել բոլոր հնարավոր դեպքերը):

12*. Տրված են հինգ այնպիսի կետեր, որոնցից ցանկացած չորսը չեն գտնվում մի հարթության մեջ: Քանի՞ հարթություն է հնարավոր տանել այդ կետերի եռյակներով:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Դիտեք նկար 16-ը: Փաստարկներ բերեք այն բանի օգտին, որ այդպիսի առարկա գոյություն ունենալ չի կարող: Փորձեք նկարել այնպիսի պատկեր, որն իրականում անհնար է կառուցել: Բացատրեք ձեր ներկայացրած նկարը:**



Նկ. 16

2. **Այն դերը, ինչը «աքսիոմը» կատարում է մաթեմատիկայում, այլ բնագավառներում կատարում են այնպիսի դրույթներ, որոնք, կախված բնագավառից, կոչվում են «սկզբունք», «օրենք», «նորմ» և այլն: Կարո՞ղ եք նկարագրել կյանքում հանդիպող իրադրություններ, երբ որևէ պնդում ապացուցելու համար հենվում են այդպիսի ելակետային դրույթների վրա:**

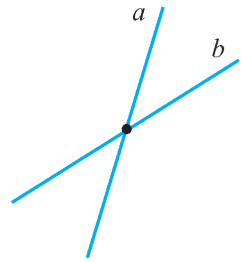
§ 2 ԵՐԿՈՒ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԴԱՍԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

2.1. Երկու ուղիղների փոխդասավորության դեպքերը

Ամեն անգամ, երբ կատարում ենք առարկաների դասակարգում, դրանք խմբավորում ենք ըստ որոշակի հատկանիշի: Օրինակ, երբ ասում ենք «Եռանկյունները լինում են սուրանկյուն, ուղղանկյուն և բութանկյուն», ապա որպես հատկանիշ ենք վերցնում եռանկյան մեծ անկյան սուր, ուղիղ, կամ բութ լինելը: Նմանապես՝ եթե դիտում ենք հարթության վրա ուղիղների զույգերը, ապա դրանք կարող ենք դասակարգել երկու տեսակի՝ *հատվող* և *զուգահեռ*: Այս դեպքում որպես հատկանիշ է վերցվում երկու ուղղի *ընդհանուր կետ* ունենալը, կամ չունենալը: Նույնպիսի մոտեցում է ցուցաբերվում նաև տարածության մեջ դիտարկվող ուղիղների զույգերի համար:

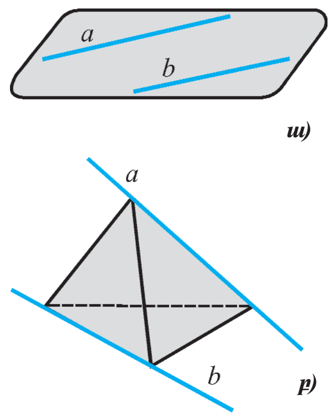
Ինչպես գիտենք, երկու ուղիղները չեն կարող ունենալ մեկից ավելի ընդհանուր կետեր, այլապես դրանք տարբեր ուղիղներ չէին լինի (հիշենք, որ երկու կետով անցնում է միայն մեկ ուղիղ): Ուրեմն՝ երկու ուղիղների փոխդասավորության համար հնարավոր են երկու դեպք՝ **ա)** ուղիղներն ունեն ընդհանուր կետ *(հատվող ուղիղներ)*, **բ)** ուղիղները չունեն ընդհանուր կետ *(չհատվող ուղիղներ)*: Նկար 17-ում պատկերված են հատվող, իսկ նկար 18,ա,բ-ում՝ չհատվող a և b ուղիղներ:

Հարթության մեջ գտնվող երկու ուղիղների փոխդասավորության դեպքերը այդքանով սպառվում են: Սակայն տարածության մեջ չհատվող ուղիղների համար հնարավոր է, իր հերթին, կատարել նոր դասակարգում՝ մեկ ուրիշ հատկանիշով: Այս դեպքում կարևորվում է մեկ այլ հարց. երկու չհատվող ուղիղները գտնվո՞ւմ են արդյոք մի հարթության մեջ, թե՞ ոչ:



Նկ. 17

Սահմանում. ***Այն երկու ուղիղները, որոնք չունեն ընդհանուր կետ և ընկած են մի հարթության մեջ, կոչվում են զուգահեռ ուղիղներ*** *(նկ. 18, ա)*:



Նկ. 18

Որպես զուգահեռ ուղիղների օրինակ կարելի է պատկերացնել սենյակի որևէ պատի հետ հատակի ու առաստաղի հատման գծերը, երկաթուղու ռելսագծերը և այլն:

Տարածության մեջ չհատվող ոչ բոլոր երկու ուղիղներն են գտնվում մի հարթության մեջ: Այն երկու ուղիղները, որոնք չունեն ընդհանուր կետ և չեն գտնվում մի հարթության մեջ, կոչվում են *խաչվող ուղիղներ* (նկ. 18, բ):

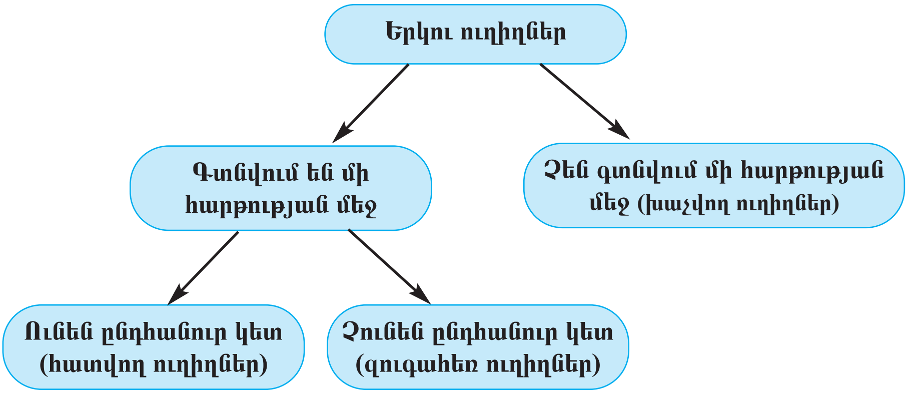
Որպես խաչվող ուղիղներ կարելի է պատկերացնել՝ դիտելով սենյակի պատի ու առաստաղի հատման գիծը և կից պատի ու հատակի հատման գիծը: Նույնպիսի առօրեական օրինակներ են, ասենք, մայրուղու եզրագիծը և նրա վրա կամրջող երկաթգիծը կամ ձգված էլեկտրալարը (նկ. 19):

Ուշադրություն դարձնենք հետևյալ հանգամանքին:

Երկու զուգահեռ ուղիղները գտնվում են մի հարթության մեջ: Բայց մի հարթության մեջ են գտնվում նաև երկու հատվող ուղիղները: Ուրեմն՝ մի հարթության մեջ գտնվելն ընդհանուր հատկանիշ է և՛ հատվող, և՛ զուգահեռ ուղիղների համար: Հետևաբար՝ երկու ուղիղների փոխդասավորության դեպքերը կարելի է դասակարգել նաև հետևյալ կերպ. **ա)** *ուղիղները գտնվում են մի հարթության մեջ*, **բ)** *ուղիղները չեն գտնվում մի հարթության մեջ*: Այժմ փոխդասավորության առաջին դեպքը, իր հերթին, կարելի է դասակարգել ենթատեսակների՝ 1) *ուղիղներն ունեն ընդհանուր կետ*, 2) *ուղիղներն ընդհանուր կետ չունեն*:


Նկ. 19

Երկու ուղիղների փոխդասավորության դեպքերը կարելի է ներկայացնել դասակարգման հետևյալ «ծառի» տեսքով:



Օգտվելով այս դասակարգումից՝ կարող ենք ճշգրիտ ձևակերպել խաչվող ուղիղների սահմանումը:

Սահմանում. ***Այն երկու ուղիղները, որոնք չեն գտնվում մի հարթության մեջ, կոչվում են խաչվող ուղիղներ:***

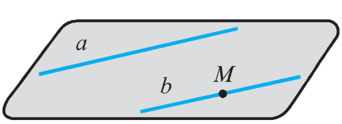
Հասկացություն սահմանելու և «ծառի» պատկերման միջոցով դասակարգում կատարելու հնարը մենք կօգտագործենք նաև հետագայում (այն լայն կիրառություն ունի նաև ուսումնական տարբեր բնագավառներում):

2.2. Չհատվող ուղիղների մի քանի հատկություններ

Երկու չհատվող ուղիղները, ինչպես տեսանք, կա՛մ զուգահեռ են, կա՛մ խաչվող: Դիտարկենք այդպիսի ուղիղների մի քանի կարևոր հատկություններ:

Նախ դիտարկենք զուգահեռ ուղիղները:

1. Այն, որ երկու զուգահեռ ուղիղներն ընկած են մի հարթության մեջ, անմիջապես բխում է զուգահեռ ուղիղների սահմանումից: Իսկ որ երկու զուգահեռ ուղիղներով չեն կարող անցնել մեկից ավելի հարթություններ, կարելի է ցույց տալ այսպես: Դիցուք՝ a-ն և b-ն զուգահեռ ուղիղներ են: b ուղղի կամայական M կետը գտնվում է a ուղղից դուրս (նկ. 20): a և b ուղիղներով անցնող հարթությունը նաև a ուղղով և M կետով անցնող հարթությունն է, որն ըստ աքսիոմների հետևանք 1-ի՝ միակն է:



Նկ. 20

Այսպիսով, կարող ենք եզրակացնել.

Երկու զուգահեռ ուղիղներով անցնում է հարթություն և այն էլ՝ միայն մեկը:

Հիշենք, որ մենք գիտեինք հարթության տրման երեք եղանակ (տե՛ս կետ 1.2): Այժմ կարող ենք դրանց ավելացնել ևս մեկը՝ *հարթությունը կարող է տրվել նաև երկու զուգահեռ ուղիղներով*:

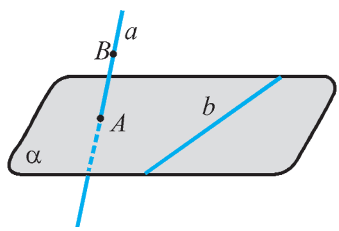
2. Հարթաչափությունից մեզ հայտնի է, որ *ուղղից դուրս տրված կետով անցնում է այդ ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ* (զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը): Պարզվում է, որ նույնն է պատկերը նաև տարածության մեջ: Բանն այն է, որ տրված ուղիղով և նրանից դուրս տրված կետով անցնում է միայն մեկ հարթություն: Իսկ այդ հարթության մեջ գործում է հարթաչափության՝ զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը:

3. Այժմ նույնանման հարց քննարկենք խաչվող ուղիղների վերաբերյալ:

Ակնհայտ է, որ եթե երկու ուղիղները չեն գտնվում մի հարթության մեջ, ապա նրանք հատման կետ չունեն (հիշենք, որ երկու հատվող ուղիղներով անցնում է հարթություն):

Պարզենք այն հարցը, թե ուղղից դուրս գտնվող կամայական կետով անցնո՞ւմ է արդյոք այդ ուղղին խաչվող ուղիղ:

Այս հարցին պատասխանելու համար ընդունենք, որ տրված են b ուղիղը և նրա վրա չգտնվող A կետը (նկ. 21): Դիցուք՝ α-ն b ուղիղով և A կետով անցնող հարթությունն է: Դիտարկենք α հարթությունից դուրս ընկած կամայական B կետ: Հեշտ է համոզվել, որ AB ուղիղը խաչվող է b ուղղին: Իսկապես, հակառակ դեպքում, եթե ենթադրենք, թե AB և b ուղիղներն ընկած են մի հարթության մեջ, ապա կստացվեր, որ B կետն ընկած է այն α հարթության մեջ, որն անցնում է b ուղիղով և A կետով: Մինչդեռ մենք B կետը վերցրել էինք α հարթությունից դուրս:



Նկ. 21

Այս դատողությունների հիման վրա ձևակերպվում է *խաչվող ուղիղների հայտանիշը*.

Եթե երկու ուղիղներից մեկն ընկած է որևէ հարթության մեջ, իսկ մյուս ուղիղն այդ հարթությունը հատում է առաջին ուղղի վրա չգտնվող կետում, ապա այդ ուղիղները խաչվող են:

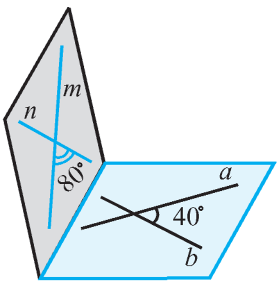
Սովորաբար խաչվող ուղիղներով են շարժվում վայրէջքի մոտեցող և վերելք կատարող ինքնաթիռները օդանավակայանի մերձակայքում:

Փորձեք մտածել այն հարցի շուրջ, թե ուղղից դուրս տրված կետով այդ ուղղին արդյոք միայն մե՞կ խաչվող ուղիղ է անցնում՝ ինչպես զուգահեռ ուղիղը, թե՞ մեկից ավելի:

2.3. Ուղիղների կազմած անկյունը

Երկու հատվող ուղիղներն ընկած են մի հարթության մեջ: Ելնելով դրանից՝ տարածության մեջ գտնվող երկու հատվող ուղիղների կազմած անկյունը որոշվում է այնպես, ինչպես հարթաչափության մեջ:

Հարթության մեջ տրված երկու ուղիղները հատվելիս առաջանում են չորս անկյուններ: Դրանցից մեկի միջոցով կարելի է որոշել նաև մյուսները՝ օգտվելով կից և հակադիր անկյունների հատկություններից: *Երկու հատվող ուղիղների կազմած անկյուն է համարվում այդ չորս անկյուններից մեկը, որը մեծ չէ մյուս երեք անկյուններից:* Օրինակ՝ նկար 22-ում a և b ուղիղների կազմած անկյունը 40^0 է, m և n ուղիղների կազմած անկյունը՝ 80^0: Հասկանալի է, որ երկու հատվող ուղիղների կազմած անկյունը մեծ չէ ուղիղ անկյունից:



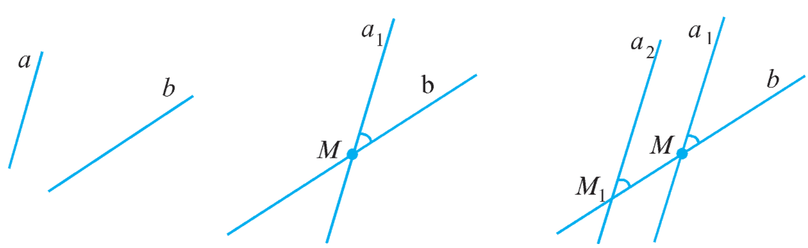
Նկ. 22

Այժմ նկարագրենք, թե ինչպես է որոշվում երկու խաչվող ուղիղներով կազմված անկյունը: Այստեղ անհրաժեշտ է այլ մոտեցում, քանի որ այդ ուղիղները մի հարթության մեջ չեն գտնվում:

Եթե a-ն և b-ն խաչվող ուղիղներ են (նկ. 23,ա), ապա կվերցնենք կամայական M կետ դրանցից մեկի, ասենք՝ b-ի վրա, և կդիտարկենք այդ կետով անցնող a_1 ուղիղը, որը զուգահեռ է մյուս ուղղին՝ a-ին (նկ. 23,բ): a_1 և b ուղիղներն արդեն հատվող են. դրանց կազմած անկյունն էլ կլինի a և b *խաչվող ուղիղների կազմած անկյունը*:

Պարզաբանման նպատակով ասենք, որ խաչվող ուղիղների կազմած անկյան մեծությունը կախում չունի տարածության մեջ ընտրված M կետի դիրքից: Բանն այն է, որ M կետի տարբեր դիրքերի ընտրության դեպքերում (օրինակ՝ M և M_1 կետերը նկ. 23, գ-ում) առաջանում են համապատասխանաբար զուգահեռ (համուղղված) կողմերով անկյուններ: Եվ պարզվում է, որ, ինչպես հարթաչափության մեջ, այստեղ նույնպես այդպիսի անկյունները հավասար են (այդ հարցին մենք հետագայում ևս կանդրադառնանք, տե՛ս նաև Ա-4 խնդիրը):

Նշենք, որ զուգահեռ ուղիղների կազմած անկյուն սովորաբար չի սահմանվում, հաճախ նաև ընդունվում է, որ դրանց կազմած անկյունը 0^0 է:



ա) ***բ)*** ***գ)***

Նկ. 23

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

13. Շարունակեք նախադասությունը.

ա) a և b ուղիղները հատվող են կամ զուգահեռ, այսինքն՝ այդ ուղիղները …

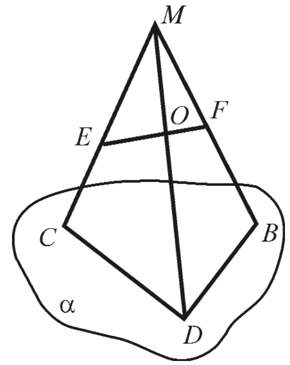
բ) a և b ուղիղները ո՛չ հատվող են և ո՛չ զուգահեռ, այսինքն՝ այդ ուղիղները …

14. Որոշեք պնդման ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.

ա) եթե AB և CD ուղիղներն ընկած են մի հարթության մեջ, ապա AC և BD ուղիղները ևս ընկած են մի հարթության մեջ,

բ) եթե AB և CD ուղիղները հատվող են, ապա AC և BD ուղիղները ևս հատվող են,

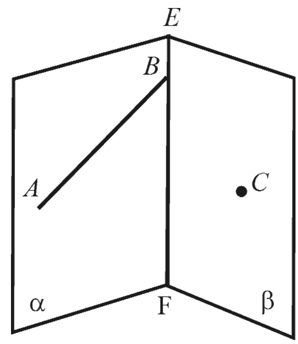
գ) եթե AB և CD ուղիղները խաչվող են, ապա AC և BD ուղիղները ևս խաչվող են:



Նկ. 24

15. Բացատրեք, թե ի՞նչ սխալ է թույլ տրված նկար 24-ում, որում O-ն EF և MD ուղիղների հատման կետն է:

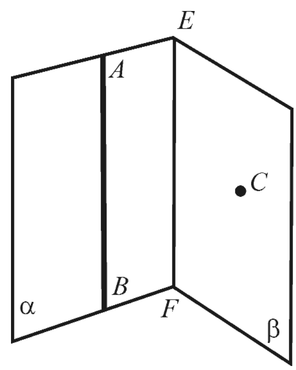
16. Երկու խաչվող ուղիղներից յուրաքանչյուրի վրա վերցրած են 2-ական կետեր: Կարո՞ղ են այդ բոլոր չորս կետերը գտնվել մի հարթության մեջ:



Նկ. 25

17. Նկար 25-ում α և β հարթությունները հատվում են EF ուղիղով: AB ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ: β հարթության մեջ C կետով տարեք (եթե հնարավոր է) այնպիսի ուղիղ, որը AB ուղղի հետ լինի՝ **ա)** հատվող, **բ)** խաչվող, **գ)** զուգահեռ:

18. Նկար 26-ում α և β հարթությունները հատվում են EF ուղիղով: AB ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ և զուգահեռ է EF-ին: β հարթության մեջ C կետով տարեք (եթե հնարավոր է) այնպիսի ուղիղ, որը AB ուղղի հետ լինի՝ **ա)** հատվող, **բ)** խաչվող, **գ)** զուգահեռ:



Նկ. 26

19. Երկու զուգահեռ ուղիղները հատվում են երրորդ ուղիղով: Ապացուցեք, որ այդ երեք ուղիղներն ընկած են մի հարթության մեջ:

20. Երկու խաչվող ուղիղները հատվում են երրորդ ուղիղով: Քանի՞ հարթություն է հնարավոր տանել այնպես, որ այն անցնի այդ երեք ուղիղներից երկուսով:

21. a և b ուղիղներից յուրաքանչյուրը խաչվող է c ուղղին: Կարո՞ղ են արդյոք a և b ուղիղները լինել՝ **ա)** հատվող, **բ)** զուգահեռ, **գ)** խաչվող:

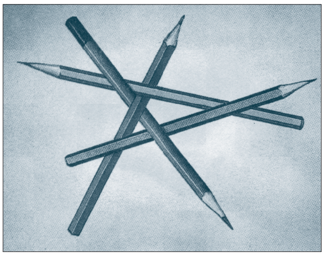
22. AOB անկյունը 110^0 է: Գտեք AO և BO ուղիղների կազմած անկյունը:

23. a, b և c ուղիղները համապատասխանաբար զուգահեռ են ABC ուղղանկյուն հավասարասրուն եռանկյան BC ու AC էջերին և AB ներքնաձիգին: Գտեք a և b, a և c, b և c ուղիղների կազմած անկյունները:

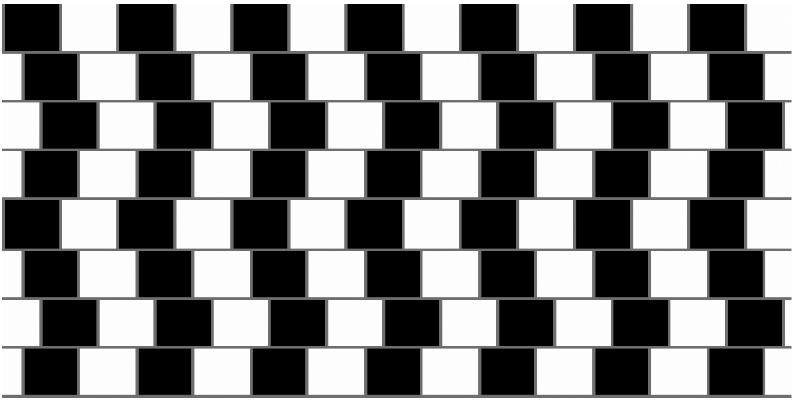
24. a և b ուղիղները զուգահեռ են, իսկ c ուղիղը հատում է a ուղիղը և չի հատում b ուղիղը: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն b և c ուղիղները: Գտեք b և c ուղիղների կազմած անկյունը, եթե a և c ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է՝ **ա)** 60^0, **բ)** 90^0:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Դիտեք նկար 27-ը: Իրականում հնարավո՞ր է ստանալ մատիտների այդպիսի դասավորություն: Պատասխանը հիմնավորեք:**
2. **Դիտեք նկար 28-ը: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն հորիզոնական գծերը: Չափումներով ստուգեք ձեր տեսողական ընկալման ճշտությունը: Փորձեք հանգել որևէ եզրակացության:**



Նկ. 27



Նկ. 28

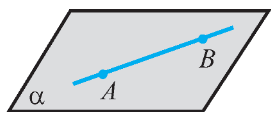
§ 3 ՈՒՂՂԻ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԴԱՍԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

3.1. Ուղղի և հարթության փոխդասավորության դեպքերը

Քննարկենք այն հարցը, թե ինչպիսի փոխդասավորություն կարող են ունենալ ուղիղը և հարթությունը:

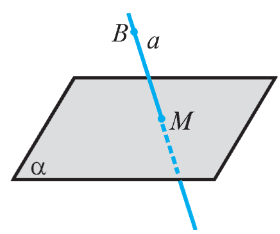
Ուղղի և հարթության փոխդասավորության դեպքերը դասակարգելիս, ինչպես որ երկու ուղիղների փոխդասավորության դեպքում, որպես հատկանիշ ենք վերցնում դրանց ընդհանուր կետ ունենալը, կամ չունենալը:

Ինչպես գիտենք, եթե ուղղի երկու կետերն ընկած են հարթության մեջ, ապա ուղղի բոլոր կետերն ընկած են այդ հարթության մեջ (Աքսիոմ A-4): Դա փոխդասավորության դեպքերից մեկն է. *երբ ուղիղն ընկած է հարթության մեջ* (նկ. 29):



Նկ. 29

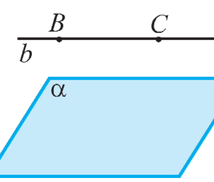
Մեզ հայտնի է նաև ուղղի ու հարթության փոխդասավորության այնպիսի դեպք, երբ դրանք *ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ*: Մասնավորապես, եթե տրված են α հարթությունն ու նրա մեջ ընկած M կետը, ապա կարող ենք վերցնել α հարթությունից դուրս կամայական B կետ, և դիտարկել M և B կետերով անցնող MB ուղիղը: α հարթության հետ այն կունենա միայն մեկ ընդհանուր կետ՝ M-ը (նկ. 30):



Նկ. 30

Հնարավոր է ուղղի և հարթության փոխդասավորության ևս մեկ դեպք, երբ նրանք *չունեն ոչ մի ընդհանուր կետ* (նկ. 31):

Սահմանում. ***Ուղիղը և հարթությունը կոչվում են զուգահեռ, եթե նրանք ընդհանուր կետ չունեն:***

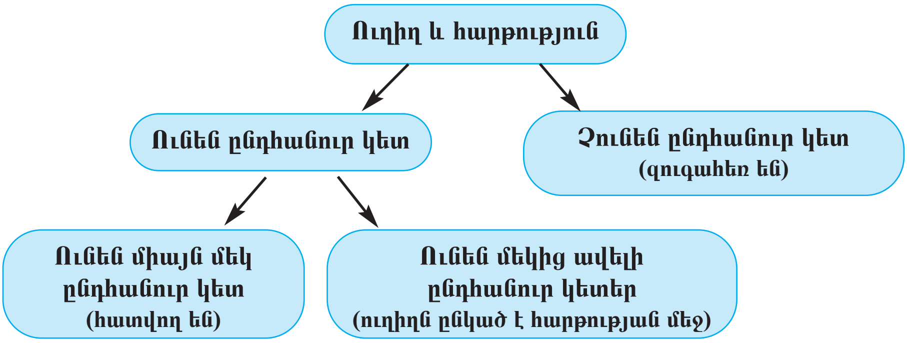


Նկ. 31

Ուղղի և հարթության զուգահեռության համար օգտագործվում է || նշանը, օրինակ՝ $b \| \alpha$, $BC \| \alpha$: Երբեմն հարկավոր կլինի խոսել նաև հարթությանը զուգահեռ հատվածի կամ ճառագայթի մասին: Այդ դեպքում նկատի կունենանք, որ հարթությանը զուգահեռ է այն ուղիղը, որն ընդգրկում է տվյալ հատվածը կամ ճառագայթը:

Զուգահեռ ուղղի և հարթության մասին ակնառու պատկերացում կարելի է ունենալ՝ դիտելով սենյակի որևէ պատի ու առաստաղի հատման գծի դասավորությունը հատակի նկատմամբ, տրամվայի էլեկտրալարի դասավորությունը փողոցի հարթության նկատմամբ և այլն:

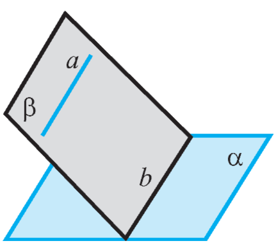
Այսպիսով, ուղղի և հարթության փոխդասավորության դեպքերը կարելի է ներկայացնել դասակարգման հետևյալ «ծառի» տեսքով.



Պարզաբանում

Ուղղի և հարթության զուգահեռությունը որոշակի կապ ունի երկու ուղիղների զուգահեռության հետ: Դա ցույց տալու համար ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ. ***Եթե ուղիղը զուգահեռ է հարթությանը և ընկած է այդ հարթությունը հատող մեկ այլ հարթության մեջ, ապա զուգահեռ է նաև այդ հարթությունների հատման գծին:***



Նկ. 32

Ապացուցում. Դիցուք՝ a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, իսկ β-ն այնպիսի հարթություն է, որ անցնում է a ուղղով և հատում է α հարթությունը (նկ. 32): Ցույց տանք, որ a ուղիղը զուգահեռ է α և β հարթությունների հատման b ուղղին:

Իսկապես, a և b ուղիղներն ընկած են նույն β հարթության մեջ: Եվ քանի որ a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը, ուրեմն այն չի կարող հատվել α հարթության մեջ ընկած ոչ մի ուղղի, այդ թվում և b ուղղին: Այսպիսով, a և b ուղիղներն ընկած են մի հարթության մեջ և չեն հատվում. դա հենց նշանակում է, որ նրանք զուգահեռ են՝ $a \| b$: Թեորեմն ապացուցված է:

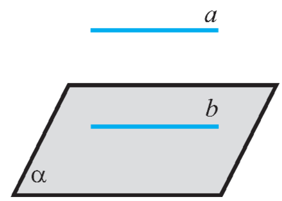
3.2. Երկու ուղղի և հարթության փոխդասավորության մի քանի դեպքեր

Մենք արդեն դիտարկել ենք՝ նախ երկու ուղիղների, այնուհետև ուղղի և հարթության փոխադարձ դասավորության դեպքերը: Օգտվելով դրանցից՝ կարելի է դիտարկել նաև երկու ուղղի և հարթության փոխդասավորության դեպքերը: Այստեղ մենք կդիտարկենք դրանցից մի քանիսը, որոնք ունեն կարևոր կիրառություններ:

1. Դիտարկենք այն դեպքը, երբ երկու ուղիղները զուգահեռ են և հայտնի է, որ նրանցից մեկը գտնվում է տրված հարթության մեջ, իսկ մյուսը՝ ոչ: Պարզենք, թե ինչպես են դասավորված մյուս ուղիղն ու հարթությունը:

Դիցուք՝ a և b ուղիղները զուգահեռ են, b ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ a ուղիղը՝ ոչ (նկ. 33):

a ուղղի և α հարթության փոխդասավորության համար մնում է հնարավոր երկու դեպք՝ կա՛մ հատվող են, կա՛մ զուգահեռ: Ցույց տանք, որ դրանց հատվող լինելը բացառվում է:



Նկ. 33

Իսկապես, դիտարկենք a և b զուգահեռ ուղիղներով անցնող β հարթությունը (տե՛ս նկ. 32-ը): Նկատենք, որ β-ն տարբեր է α հարթությունից և նրա հետ ունի ընդհանուր ուղիղ՝ b-ն: Եթե ենթադրենք, թե a ուղիղը α հարթության հետ ունի ընդհանուր կետ, ապա այդ կետը գտնվելու է α և β հարթությունների ընդհանուր ուղղի՝ b-ի վրա (ըստ A-3 աքսիոմի): Սակայն դա հնարավոր չէ, քանի որ a և b ուղիղները զուգահեռ են:

Հետևաբար՝ a ուղիղը չի հատվում α հարթությանը, ուրեմն դրանք զուգահեռ են:

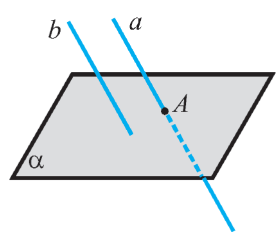
Երկու ուղղի և հարթության փոխդասավորության այս դեպքի դիտարկման արդյունքում կարող ենք ձևակերպել *ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշը*.

Եթե տրված հարթության մեջ չգտնվող ուղիղը զուգահեռ է այդ հարթության մեջ ընկած որևէ ուղղի, ապա այն զուգահեռ է նաև տրված հարթությանը:

Օգտվելով այս հայտանիշից՝ հեշտությամբ կարելի է լուծել այն խնդիրը, թե հարթությունից դուրս տրված կետով ինչպե՞ս տանել այդ հարթությանը զուգահեռ ուղիղ: Դրա համար բավական է այդ կետով տանել այնպիսի ուղիղ, որը զուգահեռ է հարթության մեջ ընկած մի որևէ ուղղի:

2. Դիտարկենք այն դեպքը, երբ երկու ուղիղները զուգահեռ են, և հայտնի է, որ նրանցից մեկը հատում է տրված հարթությունը: Պարզենք մյուս ուղղի և հարթության փոխադարձ դասավորությունը:

Դիցուք՝ զուգահեռ ուղիղներն են a-ն և b-ն, նրանցից մեկը, ասենք՝ a ուղիղը հատում է α հարթությունը՝ A կետում (նկ. 34): b ուղղի և α հարթության փոխդասավորությունը կարելի է պարզել *դեպքերի բացառման եղանակով*: Այսինքն՝ ցույց է տրվում, որ անհնար է b ուղղի՝ α հարթության մեջ ընկած լինելը, ինչպես նաև նրանց զուգահեռ լինելը (ապացուցման այդ քայլերը բերված են Ա-1 խնդրի լուծման մեջ): Մնում է եզրակացնել, որ b ուղիղը հատում է α հարթությունը: Այսպիսով՝



Նկ. 34

Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը հատում է որևէ հարթություն, ապա մյուս ուղիղը ևս հատում է այդ հարթությունը:

Պարզաբանում

Վերոհիշյալ դիտարկումների հիման վրա կարելի է ցույց տալ, որ ուղիղների զուգահեռությունը փոխանցական է:

Ինչպես գիտեք, *փոխանցականությունը* մաթեմատիկայում նշանակում է, որ եթե որևէ հատկությամբ օժտված են առարկաների a ու b և b ու c զույգերը, ապա նույն հատկությամբ օժտված կլինեն նաև a ու c զույգը:

Այստեղ որպես առարկաներ են դիտվում a, b, c երեք ուղիղները, իսկ որպես հատկություն՝ զուգահեռությունը:

Հարթաչափությունից հայտնի է, որ *եթե երկու ուղիղներից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է երրորդ ուղղին, ապա այդ երկու ուղիղները ևս զուգահեռ են:*

Պարզվում է, որ այդ պնդումը ճշմարիտ է նաև տարածության մեջ գտնվող երեք ուղիղների համար (տե՛ս նաև Ս-2 խնդրի լուծումը):

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

25. A, B, C և D կետերը մի հարթության մեջ չեն գտնվում: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն՝ **ա)** ABC հարթությունն ու AC ուղիղը, **բ)** ACD հարթությունն ու AB ուղիղը, **գ)** AB և CD ուղիղները:

26. Երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկն ընկած է տրված հարթության մեջ, իսկ մյուսն այդ հարթության հետ ունի ընդհանուր կետ: Ճշմարի՞տ է, որ մյուս ուղիղը ևս ընկած է այդ հարթության մեջ:

27. Տրված են A կետում հատվող a և b ուղիղները, իսկ c ուղիղը հատում է այդ երկու ուղիղները: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն a և b ուղիղներով անցնող հարթությունը և c ուղիղը, եթե՝ **ա)** c ուղիղը չի անցնում A կետով, **բ)** c ուղիղն անցնում է A կետով:

28. Տրված են երկու զուգահեռ ուղիղներ: Դիտարկվում են բոլոր այն ուղիղները, որոնք միաժամանակ հատում են տրված այդ երկու ուղիղները: Ի՞նչ պատկեր է առաջանում: Կատարեք գծագիր:

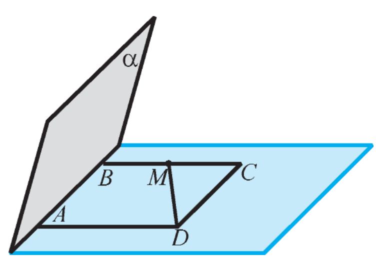
29. $ABCD$ զուգահեռագծի AB կողմն ընկած է α հարթության մեջ: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն կարող են ունենալ CD կողմը և α հարթությունը: Պատասխանը հիմնավորեք:

30. Նկար 35-ում $ABCD$-ն զուգահեռագիծ է: Ըստ նկարի որոշեք հետևյալ պնդումների ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.

ա) DM ուղիղը հատում է α հարթությունը,

բ) CD ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը,

գ) DM և AB ուղիղները խաչվող են:



Նկ. 35

31. Սեղանի միջին գիծն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ գագաթները՝ ոչ: α հարթության նկատմամբ ինչպիսի՞ դասավորություն ունեն սեղանի հիմքերը և սրունքները:

32. Սեղանի հիմքերից մեկն ու մի սրունքն ընկած են տրված հարթության մեջ: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն սեղանի միջին գիծն ու այդ հարթությունը: Պատասխանը հիմնավորեք:

33. $a \| b$, $c \| b$: Գոյություն ունի՞ արդյոք a և c ուղիղներով անցնող հարթություն: Եթե այո, ապա ինչպիսի՞ դասավորություն կարող են ունենալ այդ հարթությունն ու b ուղիղը:

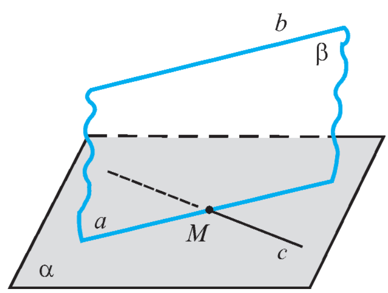
34. a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը: Ապացուցեք, որ α հարթության կամայական M կետով անցնում է այդ հարթության մեջ ընկած այնպիսի ուղիղ, որը զուգահեռ է a ուղղին:

35. Հարթությունը հատում է տրված եռանկյան երկու կողմերը՝ դրանց միջնակետերում: Ապացուցեք, որ եռանկյան երրորդ կողմը զուգահեռ է այդ հարթությանը:

36. ABC եռանկյան AC կողմը զուգահեռ է α հարթությանը, որը եռանկյան AB և BC կողմերը հատում է համապատասխանաբար E և F կետերում: Հայտնի է, որ $AE:EB=2:3$: Գտեք $CF:FB$ հարաբերությունը*:

37*. Տրված են b և c խաչվող ուղիղները: Ինչպե՞ս կառուցել b ուղղին զուգահեռ հարթություն, որն անցնի c ուղղով:

Լուծում. c ուղղի վրա վերցնենք կամայական M կետ: M կետը չի գտնվում b ուղղի վրա: Տանենք M կետով և b ուղիղով անցնող հարթությունը՝ β-ն (նկ. 36): β հարթության մեջ M կետով տանենք b ուղղին զուգահեռ a ուղիղը: a և c հատվող ուղիղներով անցնող α հարթությունը որոնելին է (բացատրեք՝ ինչո՞ւ):



Նկ. 36

38*. Տրված են a և b խաչվող ուղիղները և մի M կետ՝ այդ ուղիղներից դուրս: Ինչպե՞ս կառուցել M կետով անցնող այնպիսի հարթություն, որը զուգահեռ է և՛ a, և՛ b ուղղին: Ո՞ր դեպքում խնդիրը լուծում չունի՝ կախված M կետի դիրքից:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Պահանջվում է պարզել, թե աթոռի չորս ոտքերի ծայրերն արդյոք գտնվո՞ւմ են մի հարթության մեջ, թե՞ ոչ: Ինչպե՞ս դա կկատարեք՝ օգտագործելով միայն բարակ թել:**
2. **Պատրաստեք պաստառ պարզաբանելու համար երկու ուղղի և հարթության փոխդասավորության մասին հետևյալ պնդումը.**

   Եթե երկու ուղիղներ զուգահեռ են նույն հարթությանը, ապա դրանից չի հետևում, որ այդ ուղիղները զուգահեռ են. դրանք կարող են լինել ինչպես հատվող, այնպես էլ խաչվող կամ զուգահեռ:

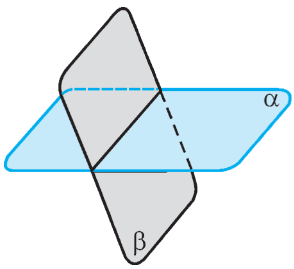
* *Հիշե՛ք.* եռանկյունների հավասարության և նմանության հայտանիշներից կարող ենք օգտվել նաև տարածաչափության մեջ (նաև այն դեպքում, երբ եռանկյունները գտնվում են տարբեր հարթությունների մեջ):

§ 4 ԵՐԿՈՒ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԴԱՍԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

4.1. Երկու հարթությունների փոխդասավորության դեպքերը

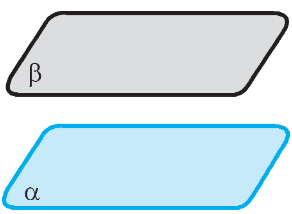
Քննարկենք այն հարցը, թե փոխդասավորության ինչպիսի դեպքեր են հնարավոր երկու հարթությունների համար: Այստեղ նույնպես դասակարգումը կկատարենք ըստ նրանց՝ ընդհանուր կետեր ունենալու, կամ չունենալու հատկանիշի:

Գիտենք, որ եթե երկու հարթությունները ունեն ընդհանուր կետ, ապա նրանք հատվում են ուղիղով (ըստ աքսիոմ A-3-ի): Դրանից հետևում է, որ երկու հարթությունները կարող են կա՛մ ունենալ ընդհանուր կետ, այսինքն՝ հատվել ուղիղով (նկ. 37), կա՛մ չունենալ ոչ մի ընդհանուր կետ, այսինքն՝ լինել չհատվող (նկ. 38):



Նկ. 37

Սահմանում. ***Այն երկու հարթությունները, որոնք չունեն ընդհանուր կետ, կոչվում են զուգահեռ հարթություններ:***

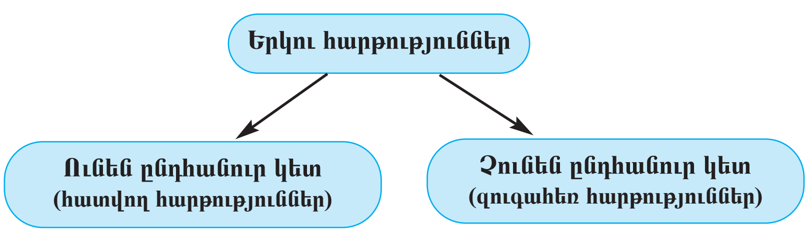


Նկ. 38

Հարթությունների զուգահեռության համար օգտագործվում է նույն ∥ նշանը, օրինակ՝ $\alpha \parallel \beta$ (տե՛ս նկ. 38):

Որպես զուգահեռ հարթությունների օրինակ կարելի է պատկերացնել՝ դիտելով սենյակի հանդիպակաց պատերը, կամ հատակն ու առաստաղը:

Այսպիսով, երկու հարթությունների փոխդասավորության դեպքերը կարող ենք արտահայտել դասակարգման հետևյալ «ծառի» տեսքով.

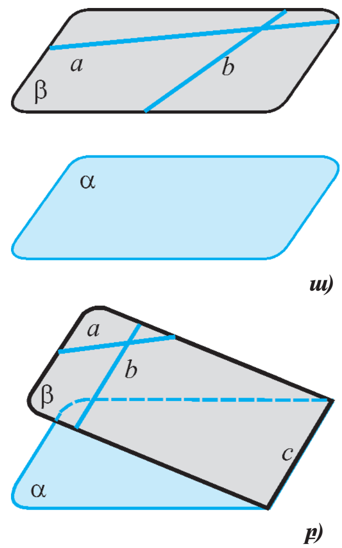


Նկատենք, որ *եթե երկու հարթություններ զուգահեռ են, ապա հարթություններից մեկի մեջ ընկած ցանկացած ուղիղը զուգահեռ է մյուս հարթությանը:*

Երկու հարթությունների զուգահեռ լինելը կարելի է որոշել՝ օգտվելով *հարթությունների զուգահեռության հայտանիշից*:

Թեորեմ. ***Եթե մի հարթության մեջ ընկած երկու հատվող ուղիղներ զուգահեռ են մյուս հարթությանը, ապա այդպիսի հարթությունները զուգահեռ են:***

Ապացուցում. Դիցուք՝ β հարթության մեջ ընկած են a և b հատվող ուղիղները, որոնցից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է α հարթությանը (նկ. 39,ա): Ենթադրենք, թե α և β հարթությունները զուգահեռ չեն և հատվում են c ուղիղով (նկ. 39,բ): Այդ դեպքում կստացվեր, որ ինչպես a, այնպես էլ b ուղիղը զուգահեռ է c ուղղին: Իսկապես, β հարթությունն անցնում է α հարթությանը զուգահեռ a ուղիղով, ուրեմն՝ a ուղիղը զուգահեռ կլինի α և β հարթությունների հատման գծին՝ c ուղղին (ըստ 3.1 կետի թեորեմի): Նույն կերպ b ուղիղը ևս զուգահեռ կլինի c ուղղին:



Նկ. 39

Այսպիսով, մեր ենթադրությունը հանգեցնում է հակասության, քանի որ ստացվում է, որ a և b հատվող ուղիղներից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է միևնույն c ուղղին: Ուրեմն՝ α և β հարթությունները չեն հատվում. նրանք զուգահեռ են: Թեորեմն ապացուցված է:

Երկու հարթության զուգահեռության հայտանիշից գործնականում հաճախ են օգտվում շինարարության մեջ: Շենքեր կառուցելիս շինարարները գիտեն, որ միջնահարկերի հորիզոնական լինելը ստուգելու համար միաժամանակ պետք է օգտագործեն երկու հարթաչափ, որոնք պետք է տեղադրվեն հատվող ուղիղների երկայնքներով:

4.2. Երեք հարթությունների փոխդասավորության մի քանի դեպքեր

Երկու հարթությունների փոխադարձ դասավորության դիտարկման օգնությամբ կարող ենք պարզել, թե փոխդասավորության ինչպիսի դեպքեր են հնարավոր երեք հարթությունների համար:

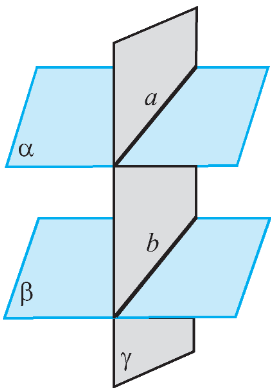
Այստեղ մենք կդիտարկենք միայն մի քանի դեպք, որոնք ունեն կարևոր կիրառություններ (մյուս հնարավոր դեպքերը փորձեք դիտարկել ինքնուրույն):

1. Նախ դիտարկենք մի դեպք, որով կապ է հաստատվում հարթությունների զուգահեռության և ուղիղների զուգահեռության միջև: Դրա համար ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ. ***Երկու զուգահեռ հարթություններ երրորդ հարթությամբ հատվելուց առաջացած ուղիղները զուգահեռ են:***

Ապացուցում. Դիցուք՝ α և β զուգահեռ հարթություններից յուրաքանչյուրը հատում է γ հարթությունը. *a* ուղիղը α և γ, *b* ուղիղը β և γ հարթությունների հատման գծերն են (նկ. 40):

Նկատենք, որ *a* և *b* ուղիղներն ընկած են նույն՝ γ հարթության մեջ: Մյուս կողմից՝ դրանք հատվել չեն կարող (հակառակ դեպքում կհատվեն α և β զուգահեռ հարթությունները): Ուրեմն, իրոք, *a* և *b* ուղիղները զուգահեռ են: Թեորեմն ապացուցված է:

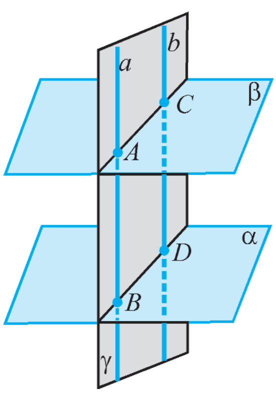


Նկ. 40

Որպես երկու զուգահեռ հարթությունների՝ երրորդ հարթությամբ հատման օրինակ կարելի է պատկերացնել՝ դիտելով սենյակի հանդիպակաց երկու պատերի ու առաստաղի փոխդասավորությունը:

Օգտվելով ապացուցված թեորեմից՝ կարող ենք կատարել մեկ այլ հետևություն ևս.

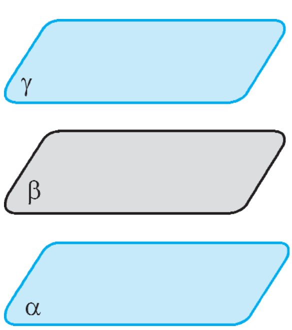
Զուգահեռ ուղիղների այն հատվածները, որոնց ծայրակետերն ընկած են երկու զուգահեռ հարթությունների մեջ, հավասար են:



Նկ. 41

Իսկապես, ընդունենք, որ *a* և *b* զուգահեռ ուղիղները հատում են α և β զուգահեռ հարթությունները, և այդ հատումից առաջանում են համապատասխանաբար *AB* և *CD* հատվածները (նկ. 41): Եթե որպես γ հարթություն վերցնենք *a* և *b* զուգահեռ ուղիղներով անցնող հարթությունը, ապա դժվար չէ համոզվել, որ *ABDC* քառանկյան հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են: Հետևաբար՝ *ABDC*-ն զուգահեռագիծ է, և, ուրեմն, նրա հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ հավասար են, այսինքն՝ *AB*=*CD*:

2. Այժմ դիտարկենք երեք հարթության փոխդասավորության այնպիսի դեպք, երբ հարթություններից երկուսը զուգահեռ են երրորդին (նկ. 42): Պարզվում է, որ զուգահեռության փոխանցականությունը տեղի ունի նաև հարթությունների համար: Այսինքն՝ *միևնույն հարթությանը զուգահեռ երկու հարթությունները զուգահեռ են:*



Նկ. 42

Ծանոթացման կարգով նշենք, որ այս հատկության ապացուցումը կարելի է կատարել հակասող ենթադրությամբ՝ օգտվելով նաև ուղիղների զուգահեռության փոխանցականությունից:

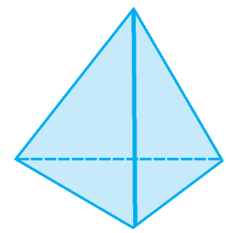
Հարթությունների զուգահեռության փոխանցականությունից ելնելով՝ մենք կարող ենք կատարել մեկ այլ հետևություն. *հարթությունից դուրս վերցված կետով անցնում է այդ հարթությանը զուգահեռ միայն մեկ հարթություն*: Իսկապես, հակառակ դեպքում մի կետով անցնող հարթությունները կլինեին նաև միմյանց զուգահեռ, ինչն անհնար է:

3. Երեք հարթությունների փոխդասավորության համար հնարավոր են նաև հետևյալ դեպքերը.

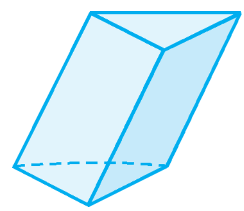
ա) հարթություններն ունեն ընդհանուր կետ, այսինքն՝ երրորդ հարթությունը հատում է երկու հարթությունների հատման գիծը (նկ. 43),

բ) հարթությունները զույգ առ զույգ հատվում են, բայց երեքն ընդհանուր կետ չունեն (նկ. 44):

Այս դեպքերի հանգամանալի քննարկմանը մենք կանդրադառնանք հետագայում «Բազմանիստեր» թեման ուսումնասիրելիս:



Նկ. 43



Նկ. 44

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

39. α և β հարթությունները զուգահեռ են: a ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ, b ուղիղը՝ β հարթության մեջ: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն կարող են ունենալ a և b ուղիղները:

40. α և β զուգահեռ հարթությունները հատվում են γ հարթությամբ համապատասխանաբար a և b ուղիղներով: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն a և b ուղիղները: Պատասխանը հիմնավորեք:

41. Որոշեք հետևյալ պնդումների ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.

ա) եթե α հարթությունն անցնում է մի ուղիղով, որը զուգահեռ է β հարթությանը, ապա α և β հարթությունները զուգահեռ են,

բ) եթե α հարթության մեջ ընկած երկու ուղիղները զուգահեռ են β հարթության մեջ ընկած երկու ուղիղների, ապա α և β հարթությունները զուգահեռ են,

գ) եթե a ուղիղն ու α հարթությունը զուգահեռ են, և β հարթությունը հատում է a ուղիղը, ապա α և β հարթությունները հատվում են:

42. Դիցուք՝ α-ն, β-ն, γ-ն հարթություններ են, իսկ a-ն, b-ն, c-ն՝ ուղիղներ: Պարզեք հետևյալ պնդումների ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.

ա) եթե $\alpha \| \beta$, $\beta \| \gamma$, ապա $\alpha \| \gamma$,

բ) եթե $a \| \alpha$, $\alpha \| \beta$, ապա $a \| \beta$,

գ) եթե $a \| b$, $b \| \alpha$, ապա $a \| \alpha$,

դ) եթե $a \| \alpha$, $b \| \alpha$, ապա $a \| b$,

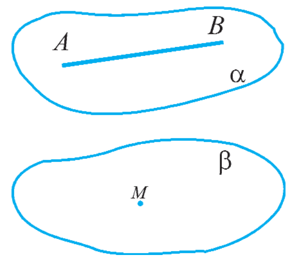
ե) եթե $c \| b$, $b \subset \gamma$, ապա $c \| \gamma$:

43. α և β հարթությունները զուգահեռ են: a ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ a ուղիղը և β հարթությունը զուգահեռ են:

44. Եռանկյան երկու կողմերը զուգահեռ են տրված հարթությանը: Ի՞նչ կարելի է ասել եռանկյան երրորդ կողմի և այդ հարթության փոխդասավորության մասին: Պատասխանը հիմնավորեք:

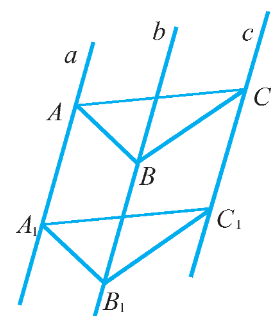
45. Եռանկյան կողմերից մեկն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ α-ին զուգահեռ β հարթությունը հատում է եռանկյան մյուս երկու կողմերը: Ապացուցեք, որ β հարթությունը եռանկյունից հատում է նրան նման եռանկյուն:

46. α և β հարթությունները զուգահեռ են: AB հատվածն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ M կետը՝ β հարթության մեջ (նկ. 45): Գտեք ABM և β հարթությունների հատման գիծը:



Նկ. 45

47. Նկ. 46-ում AA_1, BB_1 և CC_1 ուղիղները չեն գտնվում մի հարթության մեջ և զույգ առ զույգ զուգահեռ են: Հայտնի է, որ $AB \parallel A_1B_1$ և $BC \parallel B_1C_1$: Ապացուցեք, որ $AC \parallel A_1C_1$:



Նկ. 46

48*. MN ուղիղը հատում է α և β զուգահեռ հարթությունները համապատասխանաբար A և B կետերում, իսկ MP ուղիղը այդ հարթությունները հատում է համապատասխանաբար C և D կետերում: Գտեք AB-ն, եթե $AM=5$ սմ, $CM=8$ սմ, $DM=24$ սմ:

49. AB հատվածի ծայրակետերը գտնվում են համապատասխանաբար α և β զուգահեռ հարթությունների մեջ: AB հատվածի վրա ընկած M կետով տարված է ուղիղ, որը α և β հարթությունները հատում է համապատասխանաբար C և D կետերում: **ա)** Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն AC և BD ուղիղները: **բ)** Գտեք AB և BD ուղիղների կազմած անկյունը, եթե $\angle CAM=120^0$: **գ)** Գտեք BD-ն, եթե $AM=9$ սմ, $AB=15$ սմ, $AC=6$ սմ:

50*. a ուղիղը զուգահեռ է α և β հատվող հարթություններից յուրաքանչյուրին: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն a ուղիղը և α ու β հարթությունների հատման գիծը: Պատասխանը հիմնավորեք:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

Քանի՞ մասի է տրոհվում տարածությունը, երբ երկու զուգահեռ հարթությունները հատվում են երկու ուրիշ՝ ա) զուգահեռ հարթություններով, բ) հատվող հարթություններով (դիտարկեք հնարավոր բոլոր դեպքերը): Պատկերացումները հեշտացնելու համար կարող եք օգտվել գծագրերից և ձեր շրջապատի առարկաներից:

§ 5 ՔԱՌԱՆԻՍՏ ԵՎ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏ

5.1. Քառանիստ

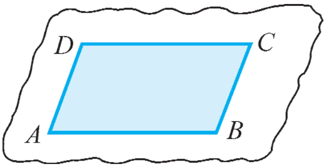
Միջին դպրոցի երկրաչափության դասընթացում մենք նախնական պատկերացումներ ենք կազմել բազմանիստերի մասին: Տարածաչափության դասընթացում ավելի խորությամբ ենք ուսումնասիրելու դրանք: Հանգամանալի դիտարկումներ կկատարենք ավելի ուշ, երբ անհրաժեշտ գիտելիքներ կունենանք տարածական հիմնական պատկերների ու դրանց առնչությունների վերաբերյալ: Բայց որպեսզի մեր դիտարկած կետերը, ուղիղներն ու հարթությունները, պատկերավոր ասած, տարածության մեջ «կախված» չմնան, այստեղ կծանոթանանք քառանիստին և զուգահեռանիստին, և դրանց վրա կցուցադրենք կետերի, ուղիղների ու հարթությունների փոխդասավորությունները:

Նախքան քառանիստի մասին խոսելը՝ կատարենք երկու պարզաբանում:

1. Տարածաչափության մեջ եռանկյուն կամ բազմանկյուն ասելով՝ կհասկանանք հարթաչափության մեջ սահմանված եռանկյունը կամ բազմանկյունը՝ վերցված ներքին տիրույթի հետ միասին: Յուրաքանչյուր եռանկյուն կամ բազմանկյուն հարթության մի մասն է, այսինքն՝ հարթ մակերևույթ է (նկար 47-ում քառանկյան համար դա ցուցադրված է):

2. Տարածական պատկերներ գծագրելիս անհրաժեշտ է առաջնորդվել որոշակի կանոններով: Մասնավորապես՝

ա) եթե պատկերը դիտելիս նրա որևէ գիծը ծածկված է և չի երևում, ապա այդ գիծը գծագրի վրա նշվում է *ընդհատ գծիկներով* (օրինակ՝ AC հատվածը նկ. 48-ում),



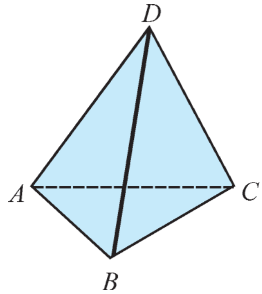
Նկ. 47

բ) զուգահեռ ուղիղները կամ հատվածները գծագրի վրա պատկերվում են զուգահեռ գծերով (օրինակ՝ AB և DC, կամ AA_1 և DD_1 հատվածները նկար 49-ում):

Գծապատկերման այլ կանոնների մասին մենք կխոսենք նաև հետագայում: Միայն նշենք, որ գծապատկերի վրա համեմատվող անկյունների և ոչ զուգահեռ հատվածների չափերի համամասնությունները կարող են և չպահպանվել (հատկապես երբ դրանք պատկերվում են թեք մակերևույթի վրա):

Այժմ անդրադառնանք քառանիստի հասկացությանը:

Դիտարկենք մի ուղղի վրա չգտնվող երեք կետ՝ A, B, C, և մի չորրորդ կետ՝ D-ն, որը չի գտնվում այդ երեք կետերով անցնող հարթության մեջ:



Նկ. 48

Եթե բոլոր չորս կետերը զույգ առ զույգ միացնենք հատվածներով, ապա կառաջանան չորս եռանկյուններ՝ ΔABC-ն, ΔABD-ն, ΔACD-ն և ΔBCD-ն (տե՛ս նկ. 48): Այդ եռանկյունները միասին կազմում են տարածական մի պատկեր, որը կոչվում է *քառանիստ*: Վերցրած կետերը՝ A-ն, B-ն, C-ն, D-ն, կոչվում են *քառանիստի գագաթներ*, դրանց միացնող հատվածները՝ *քառանիստի կողեր*, առաջացած եռանկյունները՝ *քառանիստի նիստեր*:

Այսպիսով, քառանիստն ունի 4 գագաթ, 6 կող, 4 նիստ: Նկատենք, որ քառանիստի յուրաքանչյուր գագաթով անցնում են 3 նիստ և 3 կող, իսկ յուրաքանչյուր կողով՝ 2 նիստ:

A, B, C, D գագաթներով քառանիստը նշանակվում է այսպես՝ $ABCD$: Սովորաբար քառանիստի նիստերից մեկն ընտրում են՝ անվանելով նրա *հիմք*: Այդ դեպքում մյուս երեք նիստերը կկոչվեն *կողմնային նիստեր*: Համանման ձևով՝ հիմք հանդիսացող եռանկյան կողմերը կկոչվեն *հիմքի կողեր*, իսկ մյուս երեք կողերը՝ *կողմնային կողեր*: Օրինակ, նկար 48-ում պատկերված քառանիստի համար եթե որպես հիմք վերցնենք ABC եռանկյունը, ապա ADB, ADC և BDC եռանկյունները կլինեն կողմնային նիստեր, AD, BD, CD հատվածները՝ կողմնային կողեր:

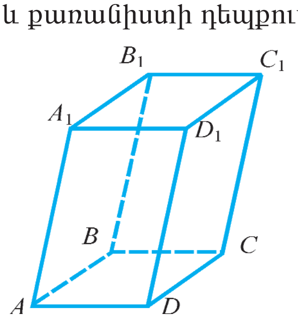
Ընդունված է, որ եթե քառանիստի հիմքն արդեն ընտրված է, ապա նրա տառային նշանակման մեջ չորրորդ գագաթը գրվում է սկզբում: Օրինակ՝ $DABC$ նշանակումով քառանիստի հիմքը ABC եռանկյունն է, իսկ $BACD$ քառանիստի հիմքը՝ ACD եռանկյունը:

5.2. Զուգահեռանիստ

Միջին դպրոցի դասընթացից գիտենք, որ զուգահեռանիստ կոչվում է այն բազմանիստը, որի մակերևույթը կազմող բոլոր վեց բազմանկյունները զուգահեռագծեր են (նկ. 49): Հետագայում մենք այն ավելի հանգամանորեն կուսումնասիրենք: Այստեղ խոսենք միայն նրա տարրերի ու մի քանի հատկությունների մասին:

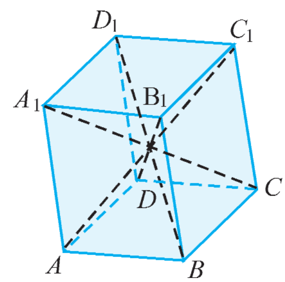
Զուգահեռանիստ կազմող զուգահեռագծերը կոչվում են *զուգահեռանիստի նիստեր*, դրանց կողմերը՝ *զուգահեռանիստի կողեր*, իսկ գագաթները՝ *զուգահեռանիստի գագաթներ*:

Զուգահեռանիստն ունի 6 նիստ, 12 կող և 8 գագաթ: Նկատենք, որ, ինչպես և քառանիստի դեպքում, զուգահեռանիստի յուրաքանչյուր գագաթով անցնում են 3 նիստ և 3 կող, իսկ յուրաքանչյուր կողով՝ 2 նիստ: Ընդհանուր կող ունեցող նիստերը կոչվում են *կից*, իսկ չունեցողները՝ *հանդիպակաց նիստեր*: Օրինակ, նկար 49-ում պատկերված $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի ADD_1A_1 և $ABCD$ նիստերը կից են, իսկ ADD_1A_1 և BCC_1B_1 նիստերը՝ հանդիպակաց:



Նկ. 49

Զուգահեռանիստի նույն նիստի վրա չգտնվող երկու գագաթները կոչվում են հանդիպակաց գագաթներ (նկար 50-ում հանդիպակաց են A-ն և C_1-ը, B-ն և D_1-ը, C-ն և A_1-ը, D-ն և B_1-ը)։ Հանդիպակաց գագաթները միացնող հատվածները կոչվում են *զուգահեռանիստի անկյունագծեր* (նկար 50-ում AC_1-ը, BD_1-ը, CA_1-ը և DB_1-ը)։ Զուգահեռանիստն ունի 4 անկյունագիծ։



Նկ. 50

Սովորաբար զուգահեռանիստի հանդիպակաց նիստերի որևէ զույգ ընտրում և դրանց անվանում են *նրա հիմքեր*։ Այդ դեպքում մյուս չորս նիստերը կկոչվեն *կողմնային նիստեր*, իսկ հիմքերին չպատկանող կողերը՝ *կողմնային կողեր*։ Օրինակ, եթե նկար 50-ում պատկերված զուգահեռանիստի համար որպես հիմքեր ենք վերցնում $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ նիստերը, ապա AA_1-ը, BB_1-ը, CC_1-ը և DD_1-ը կլինեն կողմնային կողեր, իսկ AA_1B_1B, AA_1D_1D, BB_1C_1C և CC_1D_1D նիստերը՝ կողմնային նիստեր։

Պարզվում է, որ զուգահեռանիստը հատկություններով որոշ նմանություններ ունի զուգահեռագծի հետ։ Դիտարկենք այդպիսի երկու հատկություն։

1. Զուգահեռանիստի հանդիպակաց նիստերը զուգահեռ են և հավասար։

Պարզաբանելու համար նշենք, որ նիստերի զուգահեռություն ասելով՝ նկատի է առնվում այն, որ այդ նիստերը գտնվում են զուգահեռ հարթությունների մեջ։ Այս դեպքում, եթե հիշենք հարթությունների զուգահեռության հայտանիշը և հաշվի առնենք, որ զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ են և հավասար, ապա զուգահեռանիստի այդպիսի հատկությամբ օժտված լինելը կկարողանանք հիմնավորել (տե՛ս Ա-5 խնդիրը)։

2. Զուգահեռանիստի բոլոր անկյունագծերը հատվում են մի կետում և հատման կետով կիսվում են։

Այս հատկությունը համանման է զուգահեռագծի անկյունագծերի հատկությանը։ Հիշենք հարթաչափությունից, որ զուգահեռագծի անկյունագծերը հատվում են մի կետում և հատման կետով կիսվում են։ Ուրեմն՝ այստեղ պարզապես պետք է հերթականությամբ դիտարկել զուգահեռանիստի անկյունագծերի զույգերը և օգտվել զուգահեռագծի այդ հատկությունից (տե՛ս Ա-6 խնդիրը)։

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

51. $ABCD$-ն քառանիստ է։ Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն՝

ա) AD ուղիղը և BCD հարթությունը, **բ)** AC և BD ուղիղները,
գ) ABC ու BCD հարթությունների հատման գիծը և AD ուղիղը,
դ) ABD ու ACD հարթությունների հատման գիծը և ABC հարթությունը,
ե) ABD ու BCD հարթությունների հատման գիծը և ADC ու ABC հարթությունների հատման գիծը։

52. M-ը և N-ը $ABCD$ քառանիստի AC և BC կողերի միջնակետերն են: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն՝
ա) MN և AB ուղիղները, **բ)** MN ուղիղը և ABD հարթությունը,
գ) MN և AD ուղիղները, **դ)** MND և ACD հարթությունները:

53. M-ը և N-ը $ABCD$ քառանիստի AC և BC կողերի միջնակետերն են: Պատկերեք քառանիստը և տարեք հետևյալ հարթությունների հատման գծերը՝ **ա)** DMN և BCD, **բ)** DMN և ABC, **գ)** DMN և ABD:

54. Գտեք՝ **ա)** քառանիստի և **բ)** զուգահեռանիստի բոլոր նիստերի անկյունների գումարները:

55. $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը զուգահեռանիստ է: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն՝ **ա)** AB և C_1D_1 ուղիղները, **բ)** AA_1 և CD ուղիղները, **գ)** AC և B_1C_1 ուղիղները, **դ)** A_1D և B_1C ուղիղները, **ե)** DD_1 ուղիղը և ABA_1 հարթությունը, **զ)** AB ուղիղը և A_1DC հարթությունը, **է)** AB_1C և DA_1C_1 հարթությունները:

56. M-ը և N-ը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի AB և BC կողերի միջնակետերն են: Գտեք MN և AA_1 ուղիղների կազմած անկյունը, եթե տրված է, որ $\angle ACC_1=100^0$: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն՝ **ա)** MN ուղիղը և $A_1C_1D_1$ հարթությունը, **բ)** B_1MN և A_1AD հարթությունները:

57. $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը զուգահեռանիստ է: AK-ն ընկած է AD_1D հարթության մեջ: Ապացուցեք, որ AK-ն զուգահեռ է CC_1B հարթությանը:

58. Քառանիստի բոլոր նիստերը 18 սմ պարագծով հավասարակողմ եռանկյուններ են: Գտեք այդ քառանիստի բոլոր կողերի երկարությունների գումարը:

59. Քառանիստի նիստերի պարագծերը հավասար են 25 սմ, 22 սմ, 21 սմ և 16 սմ: Գտեք այդ քառանիստի բոլոր կողերի երկարությունների գումարը:

60. $DABC$ քառանիստում $\angle DBA=\angle DBC=\angle ABC=90^0$, $BD=BA=BC=4$ սմ: Գտեք ADC նիստի մակերեսը:

61. $SABC$ քառանիստում $\angle SBC=\angle SBA=60^0$, $BA=BC=5$ սմ, $SB=AC=8$ սմ: Գտեք ASC եռանկյան մակերեսը:

62. Զուգահեռանիստի երեք նիստերի պարագծերը հավասար են 30 սմ, 24 սմ և 40 սմ: Գտեք այդ զուգահեռանիստի բոլոր կողերի երկարությունների գումարը:

63. Զուգահեռանիստի բոլոր նիստերը 8 սմ և 6 սմ անկյունագծերով շեղանկյուններ են: Գտեք այդ զուգահեռանիստի բոլոր կողերի երկարությունների գումարը:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Լուցկու հատիկներով պետք է կազմել եռանկյուններ (յուրաքանչյուր կողմը՝ մեկ հատիկ): Առավելագույնը քանի՞ եռանկյուն կարող եք ստանալ՝ օգտագործելով լուցկու ա) 6 հատիկ, բ) 12 հատիկ, գ) 24 հատիկ:**

2. **60 սմ երկարությամբ բարակ մետաղաձողը պետք է կտրատել հատվածների, որպեսզի այդ հատվածները որպես կողեր օգտագործելով՝ պատրաստվի զուգահեռանիստ: Ընդ որում՝ զուգահեռանիստի կողը չի կարող 1 սմ-ից կարճ լինել: Առավելագույնը որքա՞ն կարող է լինել զուգահեռանիստի ամենաերկար կողը:**

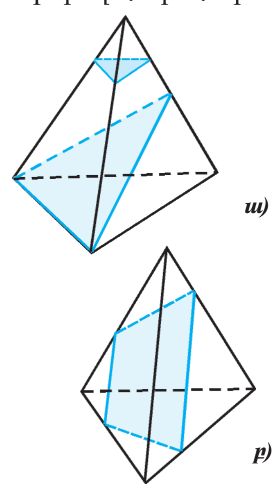
§ 6 ԳԱՂԱՓԱՐ ՀԱՏՈՒՅԹԻ ՄԱՍԻՆ

6.1. Քառանիստի և զուգահեռանիստի հատույթների օրինակներ

Երբեմն անհրաժեշտ է լինում դիտարկել բազմանիստի (քառանիստի կամ զուգահեռանիստի) հատումն այնպիսի հարթությամբ, որով տվյալ բազմանիստը *տրոհվում է երկու մասի*: Հատող հարթությունը բազմանիստի նիստերի հետ ունենում է ընդհանուր հատվածներ, առանձին դեպքերում կարող է որևէ նիստի հետ ունենալ ընդհանուր կետ, և բացառված չէ, որ որևէ նիստի հետ հատում չունենա (նկ. 51 և նկ. 52): Նիստերի ու հարթության հատումից առաջացած հատվածները կազմում են մի պատկեր, որը կանվանենք *հատույթ*:

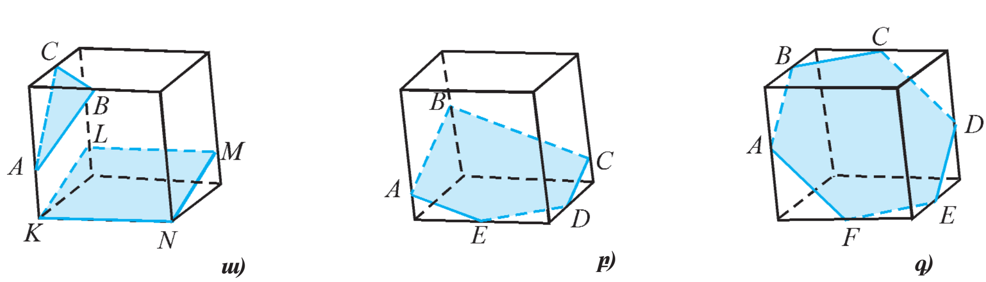
Քառանիստն ունի 4 նիստ, ուրեմն նրա հատույթը կարող է ունենալ առավելագույնը 4 կողմ: Այսինքն՝ քառանիստի հատույթը կարող է լինել եռանկյուն (նկ. 51, ա) կամ քառանկյուն (նկ. 51, բ):

Զուգահեռանիստն ունի 6 նիստ, ուրեմն նրա հատույթը կարող է ունենալ առավելագույնը 6 կողմ: Այսինքն՝ զուգահեռանիստի հատույթը կարող է լինել եռանկյուն (նկ. 52, ա), քառանկյուն (նկ. 52, ա), հնգանկյուն (նկ. 52, բ) կամ վեցանկյուն (նկ. 52, գ):



Նկ. 51

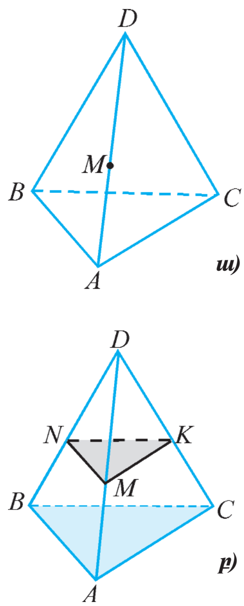
Գծագրի վրա հատույթ կառուցելու համար հարկավոր է գտնել այն կետերը, որով հատվում են տվյալ բազմա-



Նկ. 52

նիստի կողերը և hատող hարթությունը: Այնուհետև պետք է յուրաքանչյուր նիստի վրա արդեն գտնված երկու կետերը միացնել հատվածներով: Զուգահեռանիստի դեպքում կարևոր է նաև հաշվի առնել, որ եթե հարթությունը հատում է զուգահեռ նիստեր, ապա հատման գծերը զուգահեռ են:

Այժմ ցուցադրենք հատույթների կառուցման մի քանի օրինակներ:



Նկ. 53

Խնդիր 1

ABCD քառանիստի *AD* կողի վրա տրված է *M* կետ: Կառուցել քառանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է *M* կետով և զուգահեռ է *ABC* նիստին (նկ. 53, ա):

Լուծում. Տրված է, որ հատող հարթությունը զուգահեռ է *ABC* նիստին, ուրեմն այն կարող է հատվել միայն *ADC*, *ABD* և *BCD* նիստերին: Մնում է գտնել որոնելի հարթության հատման կետերը *BD* և *CD* կողերի հետ:

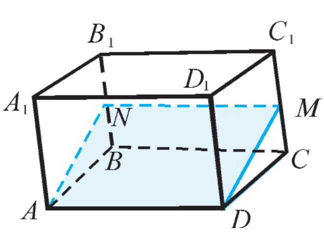
Քանի որ զուգահեռ հարթությունները երրորդ հարթությամբ հատելիս հատման գծերը զուգահեռ են, ուրեմն հատույթի՝ *ABD* նիստի մեջ ընկած հատվածը զուգահեռ է *AB* կողին, իսկ *ACD* նիստի մեջ ընկած հատվածը՝ *AC* կողին:

Այսպիսով՝ տանելով *M* կետից զուգահեռներ *AB* և *AC* կողերին՝ կգտնենք հարթության՝ *BD* կողի հետ հատման *N* կետը և *CD* կողի հետ հատման *K* կետը (նկ. 53, բ): Մնում է *M*, *N* և *K* կետերը միացնել հատվածներով և ստանալ *MNK* եռանկյունը: Հենց այդ եռանկյունն էլ պահանջվող հատույթն է:

Խնդիր 2

Կառուցել զուգահեռանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է հիմքի կողմով և դրան ոչ կից կողմնային կողի միջնակետով:

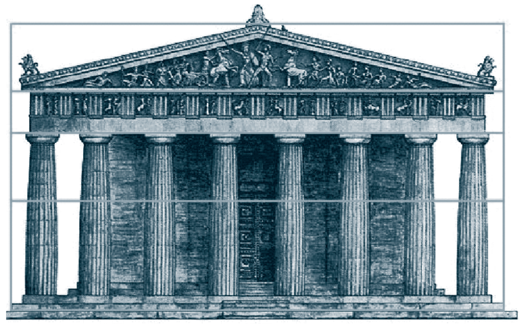
Լուծում. Դիտարկենք կամայական $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստ, վերցնենք նրա հիմքի կողմերից մեկը՝ *AD*-ն, և նշենք դրան ոչ կից CC_1 կողմնային կողի միջնակետը՝ *M*-ը (նկ. 54):



Նկ. 54

Քանի որ *AD*-ն զուգահեռ է CC_1B_1B նիստի հարթությանը (բացատրեք՝ ինչո՞ւ), ուրեմն *AD*-ով և *M* կետով անցնող հատույթը CC_1B_1B նիստի հետ հատվում է մի գծով, որը զուգահեռ է *AD*-ին: Հետևաբար, եթե *M* կետով տանենք զուգահեռ *AD*-ին (կամ *CB*-ին), ապա կգտնենք հատույթի և BB_1 կողի հատման կետը՝ *N*-ը: Մնում է հատվածներով միացնել *M* ու *D*, *N* ու *A* կետերը և կստանանք որոնելի հատույթը՝ *ADMN* քառանկյունը: Դժվար չէ համոզվել, որ դա զուգահեռագիծ է:

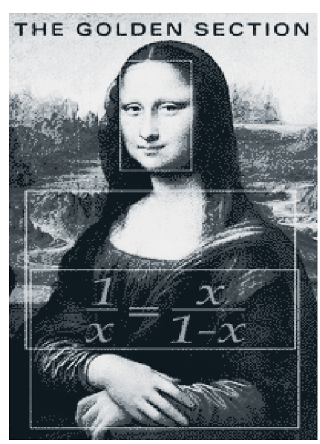
6.2. Ոսկե հատումի մասին



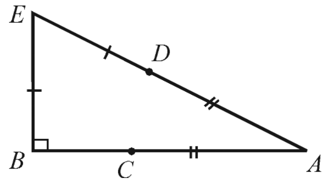
Բոլոր ժամանակներում մարդիկ ձգտել են որոնել ներդաշնակը և կատարյալը: Այդ ուղղությամբ լուրջ բացահայտումներ են կատարել Հին հույն մտածողները: Նրանք այն համոզմունքին էին, որ աշխարհը կառուցված է ներդաշնակության հիման վրա, և դրա ճանաչողության բանալին տալիս է երկրաչափությունը:

Հետաքրքրող հարցերից մեկը վերաբերում էր *ամբողջի ու նրա մասերի փոխհարաբերությանը*. ինչպիսի՞ մասերի հատել ամբողջը, որպեսզի նրանց հարաբերությունն ընկալվի որպես գեղեցիկ: Այս խնդրի բազմակողմանի վերլուծություններ են ամփոփված Պլատոնի աշխատություններում: Սակայն խնդրի լուծումը ավելի հին պատմություն ունի և այն կապվում է Պյութագորասի անվան հետ: Հավանաբար, առաջին անգամ հենց նա է բացահայտել, որ *ամբողջի՝ երկու անհավասար մասերի հատումը կլինի կատարյալ, եթե փոքր ու մեծ մասերը հարաբերեն այնպես, ինչպես մեծ մասն ու ամբողջը*: Ամբողջի այդպիսի հատումը կոչվել է *ներդաշնակ համամասնությամբ հատում*: Դրա կիրառությունների մասին որոշակի դիտարկումներ են առկա նաև Էվկլիդեսի հռչակավոր «Սկզբունքներ» աշխատության մեջ:

Ներդաշնակ համամասնության նկատմամբ մեծ հետաքրքրություն է ցուցաբերվել հատկապես Վերածննդի դարաշրջանում (XV-XVII դարեր): Իտալացի մաթեմատիկոս՝ վանական Լուկա Պաչոլին (1445-մոտ 1514 թթ.) իր «Աստվածային համամասնության մասին» վերնագրով գիրքն ամբողջությամբ նվիրել է դրան: Այդ գրքում մարդու ընկալման վրա ներդաշնակ համամասնությամբ հատումի թողած ազդեցությունը բնութագրվում է այսպիսի բառերով՝ էական, անասելի, սքանչելի, անբացատրելի, անհանգչելի, գերազանց, վեհացնող և անհասանելի: Գրքի պատկերազարդումը կատարել է Վերածննդի դարաշրջանի արվեստի մեծագույն վարպետ, գիտնական և գյուտարար Լեոնարդո դա Վինչին (1452-1519 թթ): Հենց նա էլ ներդաշնակ համամասնությամբ հատումն անվանել է *ոսկե հատում*, և մինչև օրս շրջանառվում է այդ անվանումը:



Պարզենք այն հարցը, թե թվային ինչ արտահայտություն ունի ոսկե հատումը: Դրա համար ամբողջն ընդունենք որպես 1 միավոր և նրա մեծ մասը նշանակենք φ: Այդ դեպքում փոքր մասը կլինի 1-φ: Ըստ ոսկե հատումի սահմանման՝ կազմենք հավասարում. $\frac{\varphi}{1}=\frac{1-\varphi}{\varphi}$:

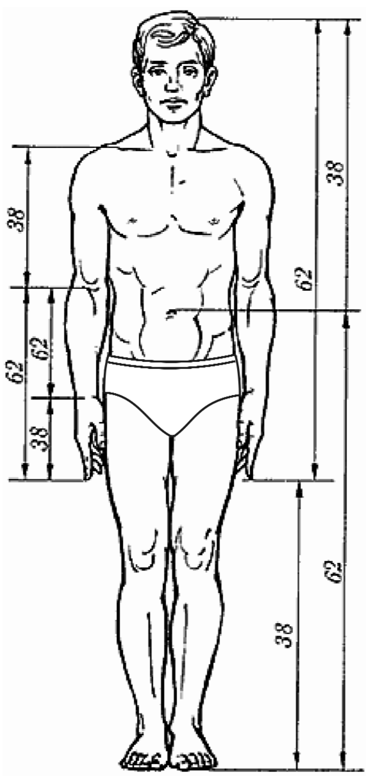


Նկ. 55

Լուծելով ձևափոխված $\varphi^2+\varphi-1=0$ հավասարումը և վերցնելով նրա դրական արմատը՝ ստանում ենք. $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\varphi \approx 0{,}62$, իսկ $1-\varphi \approx 0{,}38$):

Երկրաչափական կառուցումներում ոսկե հատում ստանալու համար կարևոր է իմանալ, թե ինչպես տրոհել հատվածը $\varphi:1$ համամասնությամբ: Դա կատարվում է այսպես (նկ. 55):

AB հատվածը $\varphi:1$ հարաբերությամբ տրոհելու համար նախ B կետում տարվում է AB-ին ուղղահայաց BE հատված, որի երկարությունը հավասար է AB-ի կեսին ($BE=AB/2$): Այնուհետև AE հատվածի վրա կառուցվում է $ED=EB$ հատվածը, որից հետո AB-ի վրա՝ $AC=AD$ հատվածը:

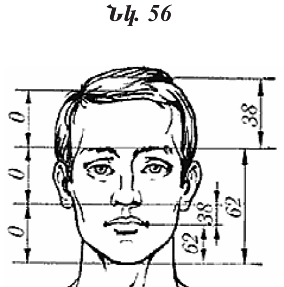


Նկ. 56

Դժվար չէ համոզվել, որ $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CB}{AC} = \varphi$: Իսկապես, եթե AB-ն ընդունենք 1 միավոր և AC-ն նշանակենք x, ապա ըստ կառուցման կունենանք. $BE = \dfrac{1}{2}$, $AE = x + \dfrac{1}{2}$: Այժմ եթե ABE եռանկյան համար օգտվենք Պյութագորասի թեորեմից, ստացվում է $1+\dfrac{1}{4} = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$ հավասարումը: Մնում է լուծել այդ հավասարումը և տեղադրումով ստանալ նշված համամասնությունները:

Ոսկե հատումի բազմաթիվ օրինակներ կան մեզ շրջապատող բնության մեջ: Ուշագրավ է այն փաստը, որ ոսկե հատումի համամասնությունն ընկած է նաև հենց մարդու մարմնի կազմության մեջ, և դեռևս անտիկ աշխարհում քանդակագործներն իրենց ստեղծագործություններում դա հաշվի են առել:

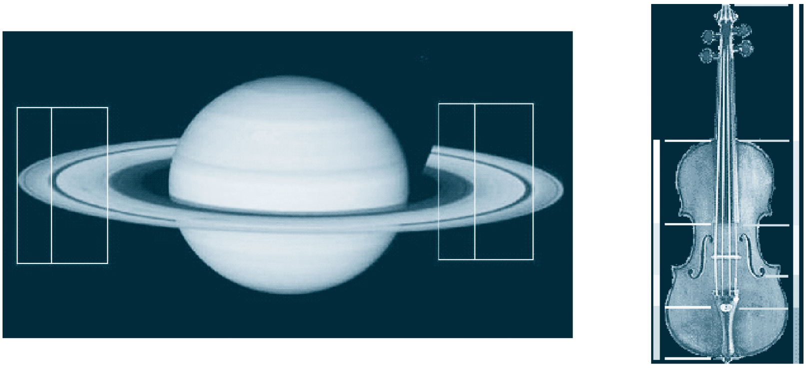
Նկար 56-ում ցուցադրված են մարդու մարմնի և նրա տարբեր մասերի համամասնությունները: Նույնպիսի համամասնություններ կան նաև մարդու գլխի վրա: Նկար 57-ում պատկերված է հասուն տարիքի մարդու գլխի գծանկարը, որում ցուցադրված են ոսկե հատումով համամասնությունները:



Նկ. 57

Ոսկե հատումը հիմք է ծառայել համաշխարհային արվեստի, հատկապես ճարտարապետության բազմաթիվ ստեղծագործությունների կառուցման համար: Այն մեծապես կիրառվել է նաև հայկական միջնադարյան ճարտարապետական կառույցներում (Ոսկեպար, Մաստարա, Թալինի Կաթողիկե, Գառնհովիտ և այլն):

Ոսկե հատումը լայն կիրառություններ ունի նաև արվեստի այլ բնագավառներում, ինչպես նաև տեխնիկայում: Ոսկե հատումի բազմազան դրսևորումներ առկա են ողջ տիեզերքում, այդ թվում՝ Արեգակնային համակարգության մեջ և մեր Գալակտիկայում:



Նկ. 58

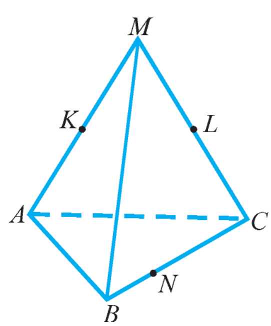
Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

64. Կառուցեք $ABCD$ քառանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է A գագաթով և BCD եռանկյան BM միջնագծով:

65. Կառուցեք $SABC$ քառանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է B գագաթով, SC կողի միջնակետով և զուգահեռ է AC կողին:

66. Կառուցեք $SABC$ քառանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է AB, AC և AS կողերի միջնակետերով: Գտեք այդ հատույթի պարագիծը, եթե SBC եռանկյան պարագիծը 40 սմ է:

67. Կառուցեք $MABC$ քառանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է MA և MC կողերի K և L միջնակետերով և BC կողի վրա ընկած այնպիսի N կետով, որ $BN:NC=1:2$ (նկ. 59): Ի՞նչ պատկեր է հատույթը:



Նկ. 59

68. Կառուցեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է՝ **ա)** AB կողով և C_1 գագաթով, **բ)** A, C և A_1 գագաթներով, **գ)** A_1, C_1 և D գագաթներով:

69. M, N և K կետերը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի համապատասխանաբար AB, AD և AA_1 կողերի միջնակետերն են: Կառուցեք զուգահեռանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որը՝ **ա)** անցնում է M և N կետերով և զուգահեռ է AA_1 կողին, **բ)** անցնում է K կետով և զուգահեռ է $ABCD$ նիստին, **գ)** անցնում է K ու M կետերով և զուգահեռ է B_1C_1 կողին, **դ)** անցնում է M, N և B_1 կետերով:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

Նկար 56-ում և 57-ում պատկերված են հասուն մարդու մարմնի և գլխի տարբեր մասերի հարաբերությունները ըստ ոսկե հատումի: Ուսումնասիրեք նկարը և փորձեք ոսկե հատումով մի բանի (ձեր կարծիքով՝ ուշագրավ) համամասնություններ արտահայտել բառերով:

Լրացուցիչ հարցեր և խնդիրներ
Գլուխ I-ի վերաբերյալ

70. Կարո՞ղ է ուղիղը միաժամանակ զուգահեռ լինել երկու հատվող հարթություններին:

71. Քանի՞ հարթություններ կան, որոնք անցնում են տրված զուգահեռանիստի առնվազն երեք գագաթով:

72. Ընտրված է մի ուղիղ, որն ընդգրկում է տրված զուգահեռանիստի կողերից մեկը: Այդ ուղղի հետ խաչվող քանի՞ ուղիղներ կան, որոնք անցնում են տրված զուգահեռանիստի որևէ երկու գագաթով:

73. Ընտրված է զուգահեռանիստի անկյունագծերից մեկը: Զուգահեռանիստը քանի՞ կողեր ունի, որոնցից յուրաքանչյուրն այդ անկյունագծի հետ կարող է գտնվել մի հարթության մեջ:

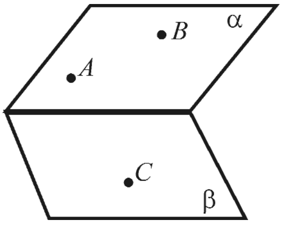
74. Քանի՞ զույգ զուգահեռ հարթություններ կան, որոնցից յուրաքանչյուրն անցնում է տրված զուգահեռանիստի առնվազն երեք գագաթով:

75. Քանի՞ զույգ զուգահեռ ուղիղներ կան, որոնցից յուրաքանչյուրն անցնում է տրված զուգահեռանիստի երկու գագաթով:

76. Երկու խաչվող ուղիղները հատվում են երկու ուղիղներով: Քանի՞ հարթություն է հնարավոր տանել այնպես, որ անցնի այդ չորս ուղիղներից առնվազն երկուսով:

77. Չորս հարթություններ հատվելիս ամենաշատը քանի՞ ուղիղներ կարող են առաջանալ, որոնք զույգ առ զույգ զուգահեռ են:

78. Նկ. 60-ում A և B կետերն ընկած են α, իսկ C կետը՝ β հարթության մեջ: Կառուցեք ABC հարթության հատման գծերը α և β հարթությունների հետ:



Նկ. 60

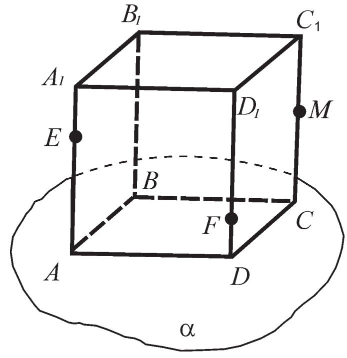
79. Կառուցեք այնպիսի ուղիղ, որը տրված երկու ուղիղներից յուրաքանչյուրի հետ խաչվող է, եթե տրված ուղիղները՝ **ա)** հատվող են, **բ*)** խաչվող են:

80. Տրված են a և b խաչվող ուղիղները և դրանց վրա չգտնվող M կետը: M կետով տարեք ուղիղ, որը հատի a և b ուղիղները: Խնդիրն արդյո՞ք միշտ լուծում ունի:

81. AC ընդհանուր կողմ ունեցող ABC և ADC եռանկյուններն ընկած են տարբեր հարթությունների մեջ: E կետն ընկած է AB կողմի, իսկ F կետը՝ BC

կողմի վրա այնպես, որ EF-ը զուգահեռ է AC ուղղին: P-ն AD կողմի միջնակետն է, իսկ K-ն՝ DC կողմի միջնակետը: **ա)** Ապացուցեք, որ $EF \parallel PK$: **բ)** Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն PK և AB ուղիղները: Գտեք դրանց կազմած անկյունը, եթե $\angle ABC=40^0$ և $\angle BCA=80^0$:

82. Նկ. 61-ում պատկերված $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի $ABCD$ նիստն ընկած է α հարթության մեջ: Կառուցեք նշված E, F, M կետերով անցնող հարթության հատման գիծը α հարթության հետ:



Նկ. 61

83. $DABC$ քառանիստում $\angle DBA=\angle DBC=90^0$, $DB=6$ սմ, $AB=BC=8$ սմ, $AC=12$ սմ: Կառուցեք քառանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է DB կողի միջնակետով և զուգահեռ է ADC հարթությանը: Գտեք հատույթի մակերեսը:

84. $ABCD$-ն տարածական քառանկյուն է (նրա գագաթներն ընկած չեն մի հարթության մեջ): Ապացուցեք, որ այդ քառանկյան կողմերի միջնակետերը զուգահեռագծի գագաթներ են:

85. Բերեք օրինակներ.

ա) այնպիսի երեք ուղիղների, որոնց հնարավոր չէ միաժամանակ հատել ցանկացած չորրորդ ուղիղով,

բ) այնպիսի երեք հարթությունների, որոնցից առնվազն մեկը կհատի տարածության ցանկացած ուղիղը:

86. Կարո՞ղ են արդյոք երկու զուգահեռ հարթությունների վրա ծայրակետեր ունեցող երկու հատվածները լինել հավասար, բայց ոչ զուգահեռ:

87. Գտեք տրված երկու զուգահեռ հարթությունների վրա ծայրակետեր ունեցող հատվածների միջնակետերի երկրաչափական տեղը:

88. Նվազագույնը քանի՞ ուղիղ պետք է վերցնել այնպես, որ ցանկացած հարթության հետ հատվի դրանցից առնվազն մեկը:

89. Տրված կամայական քառանիստի համար տարեք այնպիսի հարթություն, որ հատույթը լինի զուգահեռագիծ: Արդյո՞ք խնդիրն ունի միակ լուծում:

90. Կառուցեք $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնի B ու D_1 գագաթներով և AA_1 կողի միջնակետով:

91. Նախորդ խնդրում ավելացրեք մի այնպիսի պայման, որ հատույթը լինի շեղանկյուն:

ԳԼՈՒԽ II

ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ, ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

§ 7 ՈՒՂՂԻ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

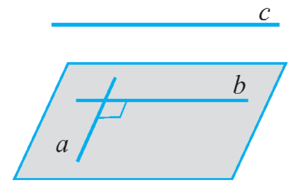
7.1. Ուղիղների ուղղահայացությունը

Հարթաչափության դասընթացից մեզ հայտնի է, որ ուղղահայացությունն ունի կարևոր կիրառություններ: Ուղղահայացի օգնությամբ չափվում են հեռավորություններ, ձևակերպվում պատկերների հատկություններ, այն օգտագործվում է մակերեսներ հաշվելիս, բազմաթիվ խնդիրներ լուծելիս և այլն: Ուղղահայացությունն առավել լայն կիրառություններ ունի տարածաչափության մեջ: Նրա օգնությամբ ոչ միայն չափվում են հեռավորությունները, այլև որոշվում են անկյունները տարածության մեջ: Այն օգտագործվում է երկրաչափական կառուցումներում, ինչպես նաև բնագիտական բազմաթիվ օրենքների ձևակերպումներում: Ուղիղների և հարթությունների ուղղահայացությունն ընկած է շինարարության, տեխնիկայի և բազմաթիվ այլ բնագավառների մեջ երկրաչափության կիրառությունների հիմքում:

Նախ դիտարկենք երկու ուղիղների ուղղահայացությունը: Հիշենք, որ հարթաչափության մեջ *երկու ուղիղներ անվանել ենք ուղղահայաց (փոխուղղահայաց), եթե նրանք կազմում են ուղիղ անկյուններ* (նրանց կազմած անկյունը 90^0 է): Նույն կերպ է սահմանվում ուղիղների ուղղահայացությունը նաև տարածաչափության մեջ: Սակայն այստեղ պետք է հաշվի առնել հետևյալ դիտարկումները:

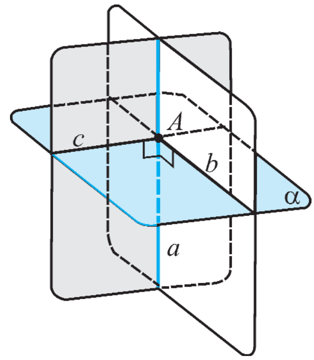
ա) Հարթության մեջ գտնվող երկու ուղղահայաց ուղիղները հատվող են: Այնինչ տարածության մեջ երկու փոխուղղահայաց ուղիղները կարող են լինել ոչ միայն հատվող, այլև խաչվող: Նկար 62-ում պատկերված a և b ուղղահայաց ուղիղները հատվող են (գտնվում են մի հարթության մեջ), իսկ a և c ուղղահայաց ուղիղները՝ խաչվող (մի հարթության մեջ չեն գտնվում):

բ) Ինչպես գիտենք, հարթության մեջ տրված ուղղի վրա ընկած կամայական կետով անցնում է այդ ուղղին ուղղահայաց միայն մեկ ուղիղ: Մինչդեռ տարածության մեջ պատկերն այլ է: Նկար 63-ում պատկերված է a ուղիղը և նրա վրա վերցված A կետը: a ուղիղով, ինչպես գիտենք, անցնում են անվերջ շատ հարթություններ: Նկար 63-ում պատկերված են այդպիսի հարթություններից երկուսը, որոնց յուրաքանչյուրի մեջ A կետով անցնում է a ուղղին ուղղահայաց ուղիղ (c-ն և b-ն): Ուրեմն՝ տարածության մեջ տրված ուղղի կամայական կետով անցնում են այդ ուղղին ուղղահայաց մեկից ավելի ուղիղներ: Հաջորդ կետում մենք ցույց կտանք, որ այդպիսի ուղիղները կազմում են մի հարթություն (α հարթությունը նկ. 63-ում), որի մեջ ընկած բոլոր ուղիղները ուղղահայաց են տրված ուղղին:



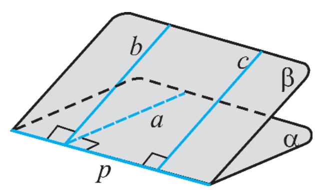
Նկ. 62

ա) և բ) դիտարկումները թույլ են տալիս կատարել հետևյալ *պարզաբանումը*:



Նկ. 63

Հարթաչափությունից մեզ հայտնի է, որ *եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկն ուղղահայաց է երրորդ ուղղին, ապա մյուսը ևս ուղղահայաց է այդ ուղղին* (1), և հակառակը՝ նույն ուղղին ուղղահայաց երկու ուղիղները զուգահեռ են (2): Պարզվում է, որ այս պնդումներից առաջինը ճշմարիտ է նաև տարածության մեջ գտնվող ուղիղների համար: Սակայն պետք է նկատել, որ նշված երկրորդ պնդումը տարածության մեջ գտնվող ուղիղների համար ճշմարիտ չէ: Այսինքն՝ նույն ուղղին ուղղահայաց երկու ուղիղները կարող են լինել ինչպես զուգահեռ, այնպես էլ հատվող կամ խաչվող: Նկար 64-ում պատկերված p ուղղին ուղղահայաց a և b ուղիղները հատվող են, b և c ուղիղները՝ զուգահեռ, a և c ուղիղները՝ խաչվող:



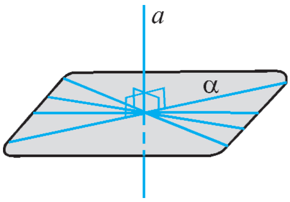
Նկ. 64

Այսպիսով, տարածության մեջ ուղիղների ուղղահայացությունը որոշակի առանձնահատկություններ ունի հարթության վրա ուղիղների ուղղահայացության համեմատ:

7.2. Հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ

Հարթությանն ուղղահայաց ուղղի մասին պատկերացում կարող են տալ, օրինակ, հարթ տեղանքում կանգնեցված էլեկտրասյուները: Այդպիսի օրինակ են նաև կախված անշարժ ճոճանակը՝ առաստաղի նկատմամբ, դռան կողափայտի եզրը՝ հատակի նկատմամբ և այլն:

Սահմանում. ***Ուղիղը կոչվում է հարթությանն ուղղահայաց, եթե այն հատում է հարթությունը և ուղղահայաց է հարթության մեջ ընկած բոլոր այն ուղիղներին, որոնք անցնում են նրանց հատման կետով*** (*նկ. 65*):

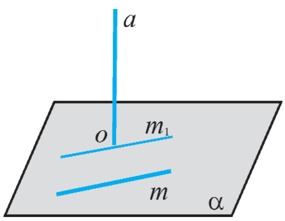


Նկ. 65

Այդ դեպքում ասում են նաև, որ *հարթությունն ուղղահայաց է ուղղին,* կամ *հարթությունը և ուղիղը փոխուղղահայաց են:*

a ուղղի և α հարթության ուղղահայացությունը նշանակելու համար օգտագործվում է նույն ⊥ նշանը՝ $a \perp \alpha$, կամ $\alpha \perp a$:

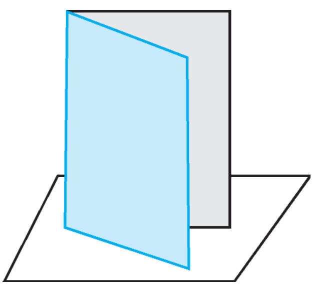
Դժվար չէ համոզվել, որ *եթե a ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը, ապա այն ուղղահայաց է α հարթության մեջ ընկած ցանկացած m ուղղին՝ նաև այն դեպքում, երբ m ուղիղը չի անցնում a ուղղի և α հարթության հատման O կետով* (նկ. 66): Իսկապես, α հարթության մեջ *O* կետով կտանենք *m* ուղղին զուգահեռ m_1 ուղիղը: Ըստ երկու ուղիղների կազմած անկյան սահմանման՝ *m* և *a* ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է m_1 ուղղի և *a* ուղղի կազմած անկյանը: Եվ քանի որ m_1 ու *a* ուղիղները կազմում են ուղիղ անկյուն, ուրեմն *m* և *a* ուղիղները ևս կազմում են ուղիղ անկյուն, այսինքն՝ $a \perp m$:



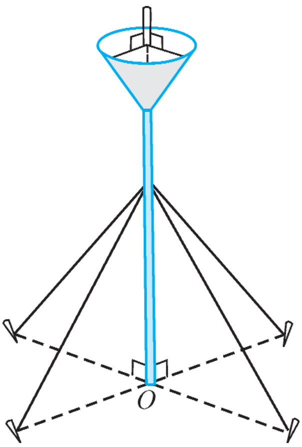
Նկ. 66

Պարզաբանում

Տրված ուղղի և հարթության ուղղահայացությունը պարզելու համար պարտադիր չէ ստուգել, որ այդ ուղիղը ուղղահայաց է տվյալ հարթության մեջ ընկած բոլոր ուղիղներին: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ այդ ուղիղն ուղղահայաց է հարթության մեջ ընկած կամայական երկու հատվող ուղիղների: Օրինակ, եթե կիսաբաց գիրքը կամ թղթապանակը ուղղաձիգ դիրքով տեղադրենք սեղանի վրա (նկ. 67), ապա գրքի կամ թղթապանակի կազմի միացման գիծն ուղղահայաց կլինի սեղանի հարթությանը: Նկատենք, որ այդ գիծն ուղղահայաց է սեղանի հարթության մեջ գտնվող երկու հատվող ուղիղների (կազմի՝ սեղանին հպված եզրերին): Նույնպիսի հնարք է օգտագործվում նաև հարթ գետնի վրա սյուներ կամ աշտարակներ կանգնեցնելիս: Նախ գետնի վրա սյան հիմքով տանում են երկու հատվող ուղիղներ և այնուհետև սյունը կանգնեցնում են այնպես, որ ուղղահայաց լինի այդ երկու ուղիղներին (նկ. 68): Այդ դեպքում սյունը կլինի գետնի հարթությանն ուղղահայաց: Նկարագրված հնարքի հիմքում ընկած է *ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշը.*



Նկ. 67



Նկ. 68

Եթե ուղիղն ուղղահայաց է հարթության մեջ ընկած երկու հատվող ուղիղների, ապա այն ուղղահայաց է այդ հարթությանը:

Այս հայտանիշն ապացուցելու համար ցույց է տրվում, որ տվյալ պայմաննե-րի դեպքում ուղիղն ուղղահայաց է հարթության մեջ ընկած կամայական ուղղին (տե՛ս Ա-7 խնդրի լուծումը):

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

92. Ձեր շրջակայքի առարկաներից բերեք այնպիսի օրինակներ, որոնցով կարողանաք ցույց տալ՝

ա) ուղղահայաց ուղիղներ, որոնք հատվող են,

բ) ուղղահայաց ուղիղներ, որոնք խաչվող են,

գ) զուգահեռ ուղիղներ, որոնք ուղղահայաց են նույն ուղղին,

դ) խաչվող ուղիղներ, որոնք ուղղահայաց են նույն ուղղին:

93. Արդյոք ճշմարի՞տ է հետևյալ պնդումը.

ա) եթե երկու ուղիղներ հատվելիս կից անկյունները հավասար են, ապա այդ ուղիղները փոխուղղահայաց են,

բ) եթե երկու ուղիղներ հատվելիս հակադիր անկյունների գումարը 180^0 է, ապա այդ ուղիղները փոխուղղահայաց են,

գ) եթե երկու ուղղահայաց ուղիղները հատվող են, ապա նրանց կազմած անկյունների կիսորդներով անցնող ուղիղները փոխուղղահայաց են,

դ) եթե երկու ուղիղներ փոխուղղահայաց են, ապա նրանք հատվում են ուղիղ անկյան տակ:

94. Գծագրով պատկերեք զույգ առ զույգ ուղղահայաց a, b, c ուղիղների դասավորությունը, եթե տրված է, որ՝

ա) նրանք հատվում են մի կետում,

բ) a և b ուղիղները c ուղղին հատում են տարբեր կետերում,

գ) a և b ուղիղները հատվող են, իսկ c ուղիղը դրանց չի հատում:

95. A, B, O կետերն ընկած են a ուղղի, իսկ C, D, O կետերը b ուղղի վրա: Արդյոք ուղղահայա՞ց են a և b ուղիղները, եթե տրված է, որ՝

ա) $\angle AOC=90^0$, **բ)** $\angle BOD<90^0$, **գ)** $\angle ABC=90^0$,

դ) $AO=BO$ և $\angle ACO=\angle BCO$, **ե)** $\angle ABD=\angle BAD$:

96. $DABC$ քառանիստի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են, AE-ն ABC հիմքի միջնագիծն է: Ցույց տվեք, որ DE և BC ուղիղներն ուղղահայաց են:

97. Հնարավո՞ր է տանել երեք այնպիսի ուղիղներ, որոնցից յուրաքանչյուրն ուղղահայաց լինի մյուս երկուսին, և այդ ուղիղները գտնվեն՝ **ա)** մի հարթության մեջ, **բ)** տարածության մեջ:

98. A, B, C և D կետերը դասավորված են այնպես, որ $AB\|CD$, $AD\|BC$ և $AB=BC$: Ապացուցեք, որ AC և BD ուղիղներն ուղղահայաց են:

99. *A*, *B*, *C*, *O* կետերը դասավորված են այնպես, որ $\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=90^0$: Դիտարկվում են այն ուղիղները, որոնք անցնում են նշված չորս կետերից որևէ երկուսով: Գտեք ուղղահայաց ուղիղների բոլոր զույգերը:

100. Պարզեք հետևյալ պնդման ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.

ա) եթե ուղիղն ուղղահայաց չէ տրված հարթությանը, ապա այն ուղղահայաց չէ այդ հարթության մեջ ընկած ցանկացած ուղղին,

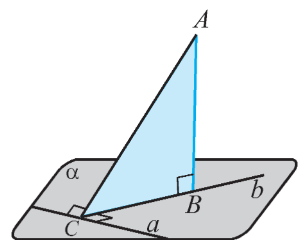
բ) եթե ուղղի որևէ կետով տարված են այդ ուղղին ուղղահայաց երեք ուղիղներ, ապա այդ երեքն էլ գտնվում են մի հարթության մեջ,

գ) ուղղի վրա տրված կետով անցնում է այդ ուղղին ուղղահայաց միայն մեկ հարթություն,

դ) եթե ուղիղն ուղղահայաց չէ տրված հարթությանը, ապա այն չի կարող ուղղահայաց լինել այդ հարթության մեջ ընկած երկու ուղիղների:

101. Տրված են α հարթությունը և նրա վրա չգտնվող *A* կետը: Ինչպե՞ս կառուցել *A* կետից α հարթությանն իջեցվող ուղղահայացը:

Լուծում. α հարթության մեջ վերցնենք կամայական *a* ուղիղ և *A* կետից *a* ուղղին տանենք *AC* ուղղահայացը (*AC*-ի կառուցումը կատարվում է *a* ուղիղով և *A* կետով անցնող հարթության մեջ): Այնուհետև α հարթության մեջ *C* կետով տանենք *a* ուղղին ուղղահայաց *b* ուղիղը (նկ. 69), որից հետո *AC* և *b* հատվող ուղիղներով անցնող հարթության մեջ *A* կետից տանենք *b* ուղղին ուղղահայաց՝ *AB*-ն:



Նկ. 69

Ապացուցենք, որ կառուցված *AB*-ն որոնելին է, այսինքն՝ այն ուղղահայաց է α հարթությանը: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ *AB*-ն ուղղահայաց է α հարթության մեջ ընկած երկու հատվող ուղիղների:

AB-ի՝ *b* ուղղին ուղղահայաց լինելն անմիջապես բխում է նրա կառուցումից, իսկ *a* ուղղին ուղղահայաց լինելը՝ ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշից: Իսկապես, ըստ կառուցման՝ *a* ուղիղն ուղղահայաց է *ABC* հարթության երկու հատվող ուղիղներին՝ *AC*-ին և *BC*-ին: Հետևաբար՝ *a* ուղիղն ուղղահայաց է *ABC* հարթությանը, ուրեմն՝ նաև նրա մեջ ընկած *AB* ուղղին: Այսինքն՝ *AB* և *a* ուղիղները փոխուղղահայաց են:

Այսպիսով, *AB*-ն ուղղահայաց է α հարթության մեջ ընկած *a* և *b* հատվող ուղիղներին, հետևաբար՝ այն ուղղահայաց է α հարթությանը:

102. Ուղիղն անցնում է *ABC* եռանկյան *A* գագաթով և ուղղահայաց է *AB* և *AC* կողմերին: Այդ ուղիղը ինչպե՞ս է դասավորված *BC* կողմի նկատմամբ:

103. Ճշմարի՞տ է, որ եթե ուղիղն ուղղահայաց է հարթության մեջ ընկած սեղանի երկու կողմերին, ապա ուղղահայաց է նաև այդ հարթությանը:

104. Կարո՞ղ է a ուղիղը կազմել հավասար անկյուններ մի կետում հատվող b, c, d երեք ուղիղների հետ: Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը՝ **ա)** բոլոր չորս ուղիղները գտնվում են մի հարթության մեջ, **բ)** b, c, d երեք ուղիղները գտնվում են մի հարթության մեջ, իսկ a-ն այդ հարթության մեջ չի գտնվում, **գ*)** չորս ուղիղներից ցանկացած երեքը մի հարթության մեջ չեն գտնվում:

105*. a ուղղի ցանկացած կետը հավասարահեռ է AB հատվածի ծայրակետերից: Արդյոք ուղղահայա՞ց են a և AB ուղիղները: Դիտարկենք AB և a ուղղի հատվող և խաչվող լինելու դեպքերը, պատասխանը հիմնավորեք:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

Ուղղի և հարթության ուղղահայացությունն օգտագործվում է ֆիզիկայի և այլ բնագավառների բազմաթիվ օրենքների ձևակերպումներում (օրինակ՝ լույսի անդրադարձման օրենքը): Պատրաստեք պաստառ, որում կցուցադրվեն ուղղի և հարթության ուղղահայացության կիրառության օրինակներ տարբեր բնագավառներում:

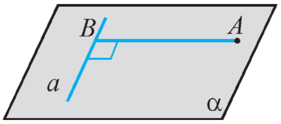
§ 8 ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑԸ ԵՎ ԹԵՔԸ

8.1. Կետի և հարթության հեռավորությունը

Տարածության մեջ ինչպես կետի և ուղղի, այնպես էլ կետի և հարթության հեռավորությունը որոշվում է ուղղահայացի օգնությամբ: Նախ դիտարկենք *կետի և ուղղի հեռավորության խնդիրը*:

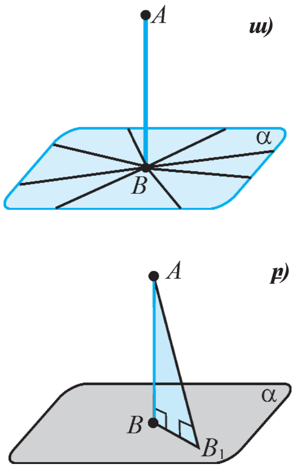
Դիցուք՝ a-ն տարածության մեջ տրված ուղիղ է, իսկ A կետը՝ a ուղղի վրա չգտնվող կամայական կետ: Ինչպե՞ս որոշել A կետի հեռավորությունը a ուղղից:

Եթե տանենք a ուղիղով և A կետով անցնող α հարթությունը, ապա խնդիրը կհանգի հարթաչափական խնդրի (նկ. 70): Այսպես, α հարթության մեջ A կետից տանենք a ուղղին ուղղահայաց AB հատվածը (B կետը ուղղահայացի *հիմքն է*): Հենց AB հատվածի երկարությունն էլ, ինչպես հարթաչափության մեջ, կոչվում է *A կետի հեռավորություն a ուղղից*. Նկատենք, որ AB-ն փոքրագույնն է այն հատվածներից, որոնք A կետը միացնում են a ուղղի կետերին (բացատրեք՝ ինչո՞ւ):



Նկ. 70

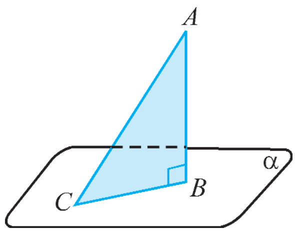
Այժմ անդրադառնանք *կետի և հարթության հեռավորության խնդրին*: Դրա համար նախ ներմուծենք *կետից հարթությանը տարված ուղղահայացի և թեքի* հասկացությունները և դիտարկենք դրանց հետ կապված որոշ հատկություններ:



Նկ. 71

Հատվածը կամ ճառագայթը կոչվում է հարթությանն ուղղահայաց, եթե այն ընկած է հարթությանն ուղղահայաց ուղղի վրա: Եթե α հարթությանն ուղղահայաց AB հատվածն այնպիսին է, որ նրա B ծայրակետն ընկած է α հարթության մեջ (նկ. 71, ա), ապա AB հատվածը կանվանենք A կետից α հարթությանն *իջեցրած ուղղահայաց*: Այդ դեպքում B կետը կոչվում է ուղղահայացի *հիմք*:

A կետից α հարթությանն իջեցրած ուղղահայացը միակն է: Հակառակ դեպքում, եթե ենթադրեինք, որ այդ ուղղահայացները, ասենք, երկուսն են՝ AB-ն և AB_1-ը (նկ. 71, բ), կստացվեր երկու ուղիղ անկյուն ունեցող ABB_1 եռանկյունը, իսկ դա անհնար է:



Նկ. 72

Ուղղահայացից բացի, մնացած բոլոր հատվածները, որոնք հարթությունից դուրս գտնվող կետը միացնում են հարթության մեջ ընկած կետերին, կոչվում են *թեքեր*: Նկար 72-ում AB-ն A կետից իջեցրած ուղղահայացն է, իսկ AC-ն՝ թեք է: C կետը կոչվում է այդ թեքի *հիմք*, CB-ն՝ AC թեքի *պրոյեկցիա* α հարթության մեջ (B-ն A կետի պրոյեկցիան է):

Նկատենք, որ ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ AB-ն էջ է, իսկ AC-ն ներքնաձիգ: Ուրեմն կարող ենք եզրակացնել, որ *հարթությունից դուրս վերցված կետից հարթությանն իջեցրած ուղղահայացը փոքր է նույն կետից այդ հարթությանը տարված ցանկացած թեքից:*

Դա կարող ենք ձևակերպել նաև այսպես. հարթությունից դուրս տրված A կետից հարթությանն իջեցրած ուղղահայացը փոքրագույնն է այն հատվածներից, որոնք այդ կետը միացնում են հարթության կետերին (A կետին հարթության կետերից ամենամոտը ուղղահայացի հիմքն է):

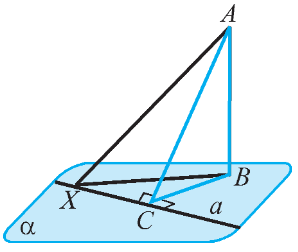
Պարզվում է, որ հարթությանն իջեցրած ուղղահայացի՝ փոքրագույն հատվածը լինելու հատկությունը *բնութագրիչ հատկություն է*: Դա նշանակում է, որ տեղի ունի նաև հակադարձ պնդումը: Այսինքն՝ *եթե A կետը α հարթության կետին միացնող հատվածներից փոքրագույնը AB-ն է, ապա հենց AB-ն էլ A կետից α հարթությանն իջեցրած ուղղահայացն է* (տե՛ս Ա-8 խնդրի լուծումը):

Այսպիսով, ուղղահայացի միջոցով որոշվում է նաև կետի ու հարթության հեռավորությունը: Երբ ասվում է *կետի հեռավորություն հարթությունից*, նկատի է առնվում այդ կետից տվյալ հարթությանն իջեցրած ուղղահայացի երկարությունը:

8.2. Երեք ուղղահայացների մասին թեորեմը

Մենք արդեն գիտենք, որ տրված կետից տրված ուղղին, կամ տրված հարթությանն իջեցրած ուղղահայացը փոքրագույնն է բոլոր այն հատվածներից, որոնք այդ կետը միացնում են տվյալ ուղղի, կամ տվյալ հարթության կետերին: Ուղղահայացի՝ փոքրագույն հատվածը լինելու այդ հատկությունը հնարավորություն է ընձեռում բացահայտելու նաև այլ օրինաչափություններ: Ներկայացնենք դրանցից մեկը:

Դիցուք՝ AB-ն A կետից α հարթությանն իջեցրած ուղղահայացն է, իսկ a ուղիղը՝ α հարթության մեջ ընկած որևէ ուղիղ (նկ. 73): Վերցնենք a ուղղի վրա կամայական X կետ և այն հատվածներով միացնենք A և B կետերին: Ստացվում է ABX ուղղանկյուն եռանկյունը, և ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $AX^2=AB^2+BX^2$: Հասկանալի է, որ X կետի դիրքը a ուղղի վրա փոփոխելիս AB հատվածը (հետևաբար նաև AB^2 գումարելին) չի փոփոխվում: AX^2 գումարի փոփոխությունը կախված է միայն BX^2 գումարելիի փոփոխությունից: Ուրեմն՝ եթե BX հատվածը փոքրանում է, ապա AX հատվածը ևս կփոքրանա, և հակառակը: AX և BX հատվածները փոքրանում են միաժամանակ: Պարզվում է, որ դրանք փոքրագույնը կդառնան այն դեպքում, երբ AX-ը և BX-ը դառնում են a ուղղին ուղղահայաց: Նկատենք, որ AX-ը α հարթությանը տարած թեք է, իսկ BX-ը նրա պրոյեկցիան է α հարթության մեջ: Հետևաբար, կետից հարթությանը տարված թեքը և նրա պրոյեկցիան այդ հարթության մեջ գտնվող ուղղին ուղղահայաց են դառնում միաժամանակ: Ըստ նկար 73-ի նշանակումների՝ դա տեղի է ունենում այն դեպքում, երբ X կետը համընկնում է C կետի հետ: Ուրեմն՝ $AC\perp a$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $BC\perp a$:



Նկ. 73

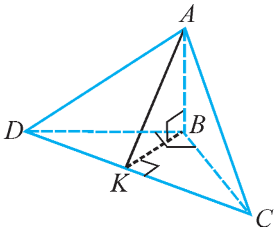
Այս պնդումը ձևակերպենք որպես թեորեմ, որն ունի կարևոր կիրառություններ (տե՛ս նաև Ա-9 խնդիրը):

Թեորեմ. ***Հարթության մեջ թեքի հիմքով անցնող ուղիղն ուղղահայաց է թեքին այն և միայն այն դեպքում, երբ ուղղահայաց է այդ թեքի պրոյեկցիային:***

Նկատենք, որ այս թեորեմում խոսվում է երեք ուղղահայացների՝ AB-ի, AC-ի և BC-ի մասին, և դա նկատի ունենալով՝ այն անվանում են *թեորեմ երեք ուղղահայացների մասին:*

Օգտվելով երեք ուղղահայացների մասին թեորեմից՝ լուծենք հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր. $ABCD$-ն այնպիսի քառանիստ է, որի B գագաթով նիստերի ABC, ABD և CBD անկյուններից յուրաքանչյուրն ուղիղ անկյուն է (նկ. 74), BC=15 սմ, BD=20 սմ, AB=5 սմ: Գտնել A գագաթի հեռավորությունը DC ուղղից:



Նկ. 74

Լուծում. B գագաթից տանենք DC-ին ուղղահայաց BK-ն, և հատվածով միացնենք A և K կետերը: Քանի որ AB-ն ուղղահայց է DB-ին և BC-ին, ուրեմն ուղղահայաց է CBD հարթությանը: Հետևաբար՝ BK-ն AK թեքի պրոյեկցիան է, և ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի՝ $AK \perp DC$: Ուրեմն՝ հենց AK հատվածի երկարությունը որոնելի հեռավորությունն է:

AK-ն կարող ենք գտնել ABK ուղղանկյուն եռանկյունուց՝ որպես ներքնաձիգ: Իսկ դրա համար նախ պետք է գտնել BK-ն:

Ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝

$CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ (սմ):

BCD եռանկյան մակերեսի համար կարող ենք գրել՝ $\dfrac{BD \cdot BC}{2} = \dfrac{DC \cdot BK}{2}$,

որտեղից՝ $BK = \dfrac{BD \cdot BC}{DC} = \dfrac{15 \cdot 20}{25} = 12$ (սմ): Այժմ օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից՝ ABK եռանկյան AK ներքնաձիգի համար ստանում ենք.

$AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (սմ): Պատասխան՝ 13 սմ:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

106. Գտեք սխալը.

ա) եթե ուղիղն ուղղահայաց է տրված հարթության մեջ ընկած երկու ուղիղների, ապա այն ուղղահայաց է նաև այդ հարթությանը,

բ) եթե հարթությանը տարված երկու թեքերը հավասար են, ապա հավասար են նաև նրանց պրոյեկցիաները,

գ) կետի հեռավորություն հարթությունից կոչվում է այդ կետից տվյալ հարթությանն իջեցրած ուղղահայացը,

դ) եթե կետից հարթությանը տարված թեքերից մեկը կրկնակի մեծ է մյուսից, ապա նրա պրոյեկցիան նույնպես կրկնակի մեծ է մյուսի պրոյեկցիայից:

107. a ուղղի վրա վերցված են B և C կետերը, իսկ ուղղից դուրս՝ A կետն այնպես, որ AC=10 սմ, AB=8 սմ, BC=6 սմ: Գտեք A կետի հեռավորությունը a ուղղից:

108. M կետն ընկած է m ուղղից դուրս: m ուղղի վրա վերցված են E և F կետերն այնպես, որ ME=MF=13 սմ, EF=10 սմ: Գտեք M կետի հեռավորությունը m ուղղից:

109. AB, AC և AD ուղիղները զույգ առ զույգ ուղղահայաց են: Գտեք AD հատվածի երկարությունը, եթե AB=3 սմ, BC=7 սմ, DC=11 սմ: Համեմատեք D կետի հեռավորությունները AC և AB ուղիղներից:

110. *MA*-ն ուղղահայաց է *ABC* հավասարակողմ եռանկյան հարթությանը: Գտեք *MC*-ն, եթե *AB*=16 սմ, *MA*=12 սմ:

111. Հարթ տեղանքում ուղղահայաց կանգնած էլեկտրասյան ստվերը 6 մ է: Որքա՞ն է սյան բարձրությունը, եթե հայտնի է, որ Արեգակը հորիզոնի նկատմամբ երևում է 45^0 անկյան տակ:

112. Սենյակի հատակն ունի 4 մ կողմով քառակուսու տեսք: Սենյակում ի՞նչ բարձրությամբ պետք է կախել լամպը, որպեսզի հատակի բոլոր անկյուններից այն ունենա 4-ական մետր հեռավորություն:

113. *A* կետը α հարթությունից ունի 3 դմ հեռավորություն: Ի՞նչ պատկեր կստացվի այդ հարթության մեջ, եթե *A* կետից նրան տարվեն 5 դմ երկարությամբ բոլոր թեքերը:

114. Հարթ գետնին ուղղահայաց կանգնած 4 մ և 6 մ բարձրությամբ սյուների վերին ծայրերից կապված է ձգված պարան: Գտեք պարանի միջնակետի հեռավորությունը գետնի մակերևույթից:

115. *MA* ուղիղն ուղղահայաց է *ABC* հավասարասրուն եռանկյան *AC* և *AB* սրունքներին, իսկ *AD*-ն այդ եռանկյան միջնագիծն է: Որոշեք հետևյալ եռանկյան տեսակը՝ **ա)** ΔMAD, **բ)** ΔMDC, **գ)** ΔMBC:

116. Նույն կետից հարթությանը տարված են երկու թեքեր: Ապացուցեք, որ այդ թեքերը հավասար են այն և միայն այն դեպքում, երբ հավասար են նրանց պրոյեկցիաները այդ հարթության վրա:

117. *MN* ուղիղն ուղղահայաց է *ABC* հավասարակողմ եռանկյան հարթությանը, ընդ որում՝ *N*-ը *BC* կողմի միջնակետն է: Գտեք *AC*-ն, եթե *AM*=6 սմ, *MN*=3 սմ:

118. *AM* ուղիղն ուղղահայաց է *ABCD* ուղղանկյան հարթությանը: Ապացուցեք, որ *MD*-ն ուղղահայաց է *DC* ուղղին:

119. *AM* ուղիղն ուղղահայաց է *ABCD* շեղանկյան հարթությանը, *O*-ն այդ շեղանկյան անկյունագծերի հատման կետն է: Ապացուցեք, որ *MO*-ն ուղղահայաց է *BD* ուղղին:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

Հարթ տեղանքում կանգնեցված է բարակ սյուն: Ինչպե՞ս կորոշեք, թե այդ սյունն արդյոք ուղղահայա՞ց է տեղանքի մակերևույթին, եթե ձեր տրամադրության տակ ունեք՝ ա) չափաժապավեն և երկար թել, բ) միայն երկար թել:

§ 9 ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ՈՒ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՀԵՌՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋԵՎ

§ 9.1. Ուղղահայացությունը երկրաչափական կառուցումներում

Ուղղի և հարթության ուղղահայացությունը տարբեր կիրառություններ ունի նաև երկրաչափական կառուցումներում: Դիտարկենք մի օրինակ՝ ինչպե՞ս կառուցել տրված կետով անցնող և տրված հարթությանը զուգահեռ հարթություն:

Դիցուք՝ α-ն տրված հարթությունն է, իսկ *M*-ը՝ նրա մեջ չգտնվող կամայական կետ (նկ. 75, ա):

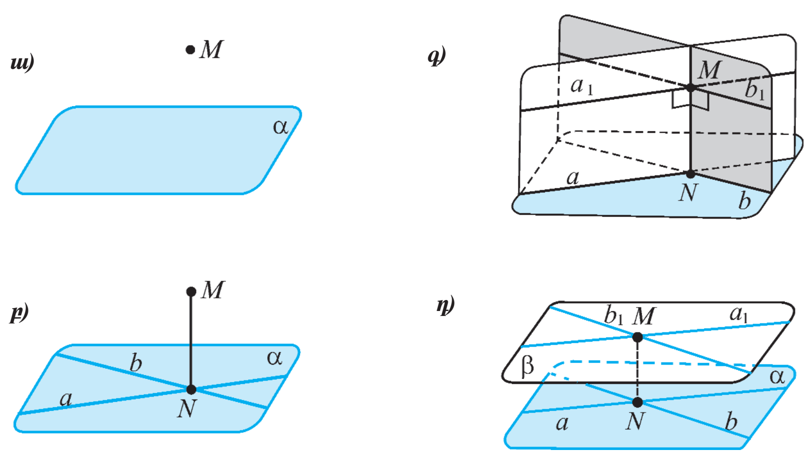
M կետով անցնող և α հարթությանը զուգահեռ հարթություն տանելու համար կատարենք հետևյալ քայլերը.

1) *M* կետից α հարթությանն իջեցնենք *MN* ուղղահայացը (տե՛ս խնդիր 101-ը) և α հարթության մեջ տանենք *N* կետով անցնող երկու կամայական *a* և *b* հատվող ուղիղներ (նկ. 75, բ):

2) *M* կետով տանենք *a* և *b* ուղիղներին համապատասխանաբար զուգահեռ a_1 և b_1 ուղիղները (դրա համար *a* ուղիղով և *M* կետով անցնող հարթության մեջ տանենք *MN*-ին ուղղահայաց ուղիղ, իսկ *b* ուղիղով և *M* կետով անցնող հարթության մեջ՝ *MN*-ին ուղղահայաց ուղիղ, նկ. 75, գ):

3) Տանենք a_1 և b_1 հատվող ուղիղներով անցնող β հարթությունը (նկ. 75, դ), որը և կլինի որոնելին՝ ըստ հարթությունների զուգահեռության հայտանիշի: Ընդ որում՝ հեշտ է նկատել, որ կառուցված β հարթությունն ուղղահայաց է *MN*-ին:

Նշենք, որ կառուցման ընթացքում՝ ա) տրված *M* կետով α հարթությանը տարված *MN* ուղղահայացը միակն է, բ) *M* կետով անցնող և *MN* ուղղին ուղղահայաց β հարթությունը միակն է, գ) *M* կետով անցնող և տրված α հարթությանը զուգահեռ հարթությունը միակն է:



Նկ. 75

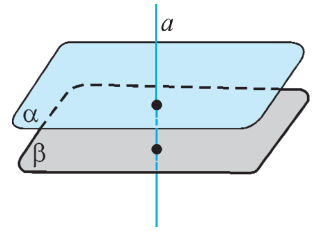
Նկատենք, որ ներկայացված օրինակում α և β հարթությունները զուգահեռ են, և նրանցից յուրաքանչյուրն ուղղահայաց է նույն MN ուղղին: Ուրեմն՝ զուգահեռության և ուղղահայացության միջև կա որոշակի կապ: Բերենք դրան վերաբերող մի քանի պնդումներ (տե՛ս նաև Ա-10 և Ա-11 խնդիրները):

ա) Եթե երկու զուգահեռ հարթություններից մեկն ուղղահայաց է տրված ուղղին, ապա մյուսը ևս ուղղահայաց է այդ ուղղին (նկ. 76):

բ) Եթե երկու հարթություններից յուրաքանչյուրն ուղղահայաց է նույն ուղղին, ապա այդ հարթությունները զուգահեռ են (նկ. 77):

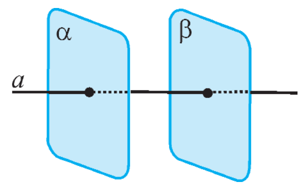
գ) Եթե երկու ուղիղներից յուրաքանչյուրն ուղղահայաց է նույն հարթությանը, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են (նկ. 78):

դ) Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկն ուղղահայաց է տրված հարթությանը, ապա մյուսը ևս ուղղահայաց է այդ հարթությանը (նկ. 79):



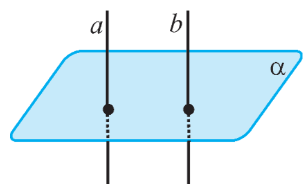
եթե $\alpha\parallel\beta$ ***և*** $\alpha\perp a$, *ապա* $\beta\perp a$

Նկ. 76



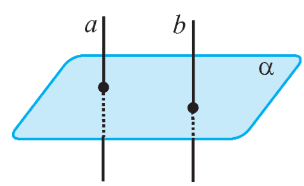
եթե $\alpha\perp a$ ***և*** $\beta\perp a$, *ապա* $\alpha\parallel\beta$

Նկ. 77



եթե $a\perp\alpha$ ***և*** $b\perp\alpha$, *ապա* $a\parallel b$

Նկ. 78



եթե $a\parallel b$ ***և*** $a\perp\alpha$, *ապա* $b\perp\alpha$

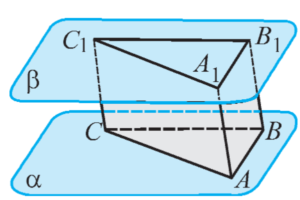
Նկ. 79

9.2. Զուգահեռ հարթությունների հեռավորությունը

Ուղիղների ու հարթությունների զուգահեռության և ուղղահայացության կապն օգտագործվում է զուգահեռ հարթությունների, ինչպես նաև զուգահեռ ուղղի ու հարթության միջև հեռավորությունները որոշելիս:

Մենք արդեն գիտենք որոշել կետի հեռավորությունն ուղղից և հարթությունից: Դրա համար այդ կետից տվյալ ուղղին կամ տվյալ հարթությանը իջեցվում է ուղղահայաց: Նույնպիսի մոտեցում է ցուցաբերվում նաև զուգահեռ հարթությունների, ինչպես նաև զուգահեռ ուղղի ու հարթության հեռավորությունը որոշելիս:

Պարզվում է, որ *երկու զուգահեռ հարթություններից մեկի բոլոր կետերը հավասարահեռ են մյուս հարթությունից*: Իսկապես, եթե α-ն և β-ն զուգահեռ հարթություններ են (նկ. 80), ապա α հարթության մեջ ընկած կամայական երկու, օրինակ, A և B կետերից β հարթությանն իջեցրած AA_1 և BB_1 ուղղահայացները հավասար են. $AA_1=BB_1$ (քանի որ $AA_1\perp\alpha$ և $BB_1\perp\alpha$,



Նկ. 80

ապա $AA_1 \parallel BB_1$, իսկ զուգահեռ ուղիղների հատվածները, որոնք պարփակված են երկու զուգահեռ հարթություններով, հավասար են): Նմանապես՝ β հարթության կետերն են հավասարահեռ α հարթությունից:

Այսպիսով, կարող ենք սահմանել. *զուգահեռ հարթությունների հեռավորություն կոչվում է հարթություններից մեկի կամայական կետի հեռավորությունը մյուս հարթությունից*:

Նույն կերպ կարելի է ցույց տալ, որ տրված հարթությանը զուգահեռ ուղղի բոլոր կետերը հավասարահեռ են այդ հարթությունից (օրինակ՝ նկար 80-ում AC ուղղի կետերը β հարթությունից հավասարահեռ են): Եվ սահմանումը ևս համանման է, այսինքն՝ *զուգահեռ ուղղի ու հարթության հեռավորություն կոչվում է ուղղի կամայական կետի հեռավորությունը հարթությունից*:

Այսպիսով, ինչպես զուգահեռ հարթությունների, այնպես էլ զուգահեռ ուղղի ու հարթության համար հեռավորություն ասելով՝ հասկանում ենք դրանց որևէ ընդհանուր ուղղահայաց հատվածի երկարությունը: Հիշենք, որ զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը նույնպես որոշվում է ընդհանուր ուղղահայացի միջոցով:

Ծանոթության կարգով ասենք, որ այդ նույն ձևով է որոշվում նաև երկու խաչվող ուղիղների հեռավորությունը: Պարզապես այդ դեպքում ընդհանուր ուղղահայացը միակն է, և դա հավասար է այն երկու զուգահեռ հարթությունների հեռավորությանը, որոնցից մեկն անցնում է այդ խաչվող ուղիղներից մեկով, իսկ երկրորդը՝ մյուսով (օրինակ, նկար 80-ում պատկերված AC և B_1C_1 խաչվող ուղիղների ընդհանուր ուղղահայացը CC_1 հատվածն է):

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

120. Ձեր շրջակայքի առարկաներից բերեք այնպիսի օրինակներ, որոնցով կարողանաք ցույց տալ՝

ա) ուղիղ, որն ուղղահայաց է երկու զուգահեռ հարթություններից յուրաքանչյուրին,

բ) հարթություն, որին ուղղահայաց են երկու զուգահեռ ուղիղներ,

գ) ուղիղ, որն ուղղահայաց է միմյանց զուգահեռ ուղղին և հարթությանը:

121. Գտեք սխալը.

ա) եթե A և B կետերից α հարթությանն իջեցրած ուղղահայացները հավասար են, ապա AB-ն զուգահեռ է α հարթությանը,

բ) եթե a ուղիղը զուգահեռ է b և c զուգահեռ ուղիղներին, ապա զուգահեռ է նաև b և c ուղիղներով անցնող հարթությանը,

գ) եթե a ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանն ու b ուղղին, ապա b ուղիղը և α հարթությունը զուգահեռ են,

դ) եթե ուղիղը զուգահեռ է երկու զուգահեռ հարթություններից մեկին, ապա զուգահեռ է նաև մյուսին:

122. a ուղիղն ուղղահայաց է α և β հարթություններին: γ հարթությունը հատում է α և β հարթությունները համապատասխանաբար b և c ուղիղներով: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն b և c ուղիղները:

123. a ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը և ուղղահայաց է նաև այդ հարթության մեջ չգտնվող b ուղղին: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն b ուղիղը և α հարթությունը:

124. ABC եռանկյան մեջ $AB=BC=25$ սմ, $AC=48$ սմ: BD-ն ուղղահայաց է ABC եռանկյան հարթությանը: Գտեք D կետի հեռավորությունը AC ուղղից, եթե $BD=\sqrt{15}$ սմ:

125. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի կողմնային նիստերն ուղղանկյուններ են: P-ն AA_1 կողի միջնակետն է: Կառուցեք զուգահեռանիստի հատույթն այն հարթությամբ, որն անցնում է P կետով և ուղղահայաց է BB_1 կողին:

126. $SABC$ քառանիստի բոլոր կողերը հավասար են: Կառուցեք այդ քառանիստի այն հատույթը, որն անցնում է AS կողով և ուղղահայաց է BC կողին:

127*. $MABC$ քառանիստի M գագաթին հարակից բոլոր հարթ անկյուններն ուղիղ անկյուն են, իսկ MA և MB կողերը համապատասխանաբար հավասար են 8 սմ և 10 սմ: Գտեք քառանիստի այն հատույթի մակերեսը, որն ուղղահայաց է MC կողին և անցնում է նրա միջնակետով:

128*. Տրված ուղղի վրա գտեք այն կետերը, որոնք հավասարահեռ են տրված երկու կետերից:

129*. A կետն ընկած է α հարթության մեջ: Ինչպե՞ս կառուցել A կետով անցնող և α հարթությանն ուղղահայաց ուղիղը:

130. a և b փոխուղղահայաց ուղիղները հատվում են A կետում: α հարթությունն անցնում է b ուղղի վրա ընկած B կետով և ուղղահայաց է նրան: Բացատրեք, թե ի՞նչ է ցույց տալիս AB հատվածի երկարությունը:

131. $ABCD$ ուղղանկյան A գագաթից տարված է նրա հարթությանն ուղղահայաց AM-ը, որի M ծայրակետի հեռավորությունները ուղղանկյան մյուս գագաթներից հավասար են 6 սմ, 7 սմ և 9 սմ: Գտեք AM ուղղահայացի երկարությունը:

132. Երկու զուգահեռ հարթությունների հեռավորությունը 12 սմ է: 13 սմ երկարությամբ հատվածի ծայրակետերն ընկած են այդ հարթությունների մեջ: Գտեք այդ հատվածի պրոյեկցիաների երկարությունները հարթությունների վրա:

«Խճանկար*» մեթոդով ուսումնասիրեք հետևյալ նյութը:

Զրույց երկրաչափության լեզվի մասին

Ընթերցում է 1-ին խումբը

Լեզուն արտահայտման և հաղորդակցման միջոց է: Ինչպես առօրեական, այնպես էլ հետազոտական և ստեղծագործական աշխատանքներում հաղորդակցվելիս գործածում ենք *խոսքային և ոչ խոսքային* արտահայտման ձևեր: Բնական լեզուն, անշուշտ, շատ հարուստ է, այն հազարամյակների ընթացքում շարունակ զարգացել է, սակայն տեղեկատվության արտահայտման տեսակետից, այնուամենայնիվ, որոշ սահմանափակություններ ունի: Դրա վկայություններն են, մասնավորապես, արվեստի բազմազան ձևերը (երաժշտություն, քանդակագործություն, կերպարվեստ և այլն), որոնք ոչ պակաս հարուստ հնարավորություններ են ընձեռում մարդկանց մտքերը, ապրումներն ու զգացմունքներն արտահայտելու համար: Հաղորդակցության ոչ խոսքային միջոցների գործածության որակապես նոր հեռանկարներ են բացում ժամանակակից տեսահաղորդակցական տեխնոլոգիաների կիրառությունները: Դրանց միջոցով ամենաբազմազան բնույթի տեղեկատվությունները փոխադրվում են թվայնացված համակարգերի և այնուհետև հաղորդվում ու ընդունվում որպես էլեկտրամագնիսական ազդանշաններ:

Այդ բոլորը ծավալվում է տարածության մեջ, և դրանց տարածական առնչություններն արտահայտելու գործում երկրաչափությունը լուրջ դերակատարություն ունի:

Չխորանալով այդ ամենի մեջ՝ այստեղ կանդրադառնանք մեր դասընթացում արծարծվող միայն մի քանի հարցերի:

Ընթերցում է 2-րդ խումբը

Երկրաչափական դրույթներ (աքսիոմները, թեորեմներն ու դրանց ապացուցումները, դիտարկվող խնդիրներն ու նրանց լուծումները) արտահայտելու համար բնական լեզվի բառերի ու նախադասությունների հետ մեկտեղ գործածվում են նաև այլ նշաններ ու պայմանանշաններ: Եվ դրանց շնորհիվ ասելիքը դառնում է ավելի ճշգրիտ, հակիրճ ու հասկանալի: Բայց կարևոր է նկատել ևս մեկ ձեռքբերում: Երկրաչափական դրույթներն ստանում են այն-

* *Խճանկարը* համագործակցային ուսումնառության մեթոդ է, որի կիրառության դեպքում սովորողները բաժանվում են մի քանի խմբերի, և սկզբում յուրաքանչյուր խումբը խորամուխ է լինում ուսումնական նյութի մի հատվածի (կամ խնդրի մի տեսանկյունի) վրա: Այնուհետև խմբերը վերակազմավորվում են այնպես, որ նոր խմբերից յուրաքանչյուրում ընդգրկվեն նախորդ խմբերի ներկայացուցիչներ: Այստեղ խմբի անդամները հերթականությամբ մյուսներին բացատրում են իրենց ուսումնասիրած հարցը: Այդպիսով ամեն մի սովորող ստանձնում է նաև սովորեցնողի դեր, և արդյունքում յուրաքանչյուրը սովորում է նաև ամբողջ նյութը:

պիսի ձևակերպումներ, որոնք ընդհանրական տեսք ունեն տարբեր լեզուների տիրապետող մարդկանց համար:

Նույնատիպ մոտեցում առկա է նաև արվեստի, գիտության, տեխնիկայի և արտադրության մի շարք բնագավառներում: Այդպիսի տիպական օրինակներ են նոտագրության նշանները երաժշտության մեջ, թվանշաններն ու բանաձևերը հանրահաշվում, նյութերի կառուցվածքային բանաձևերը քիմիայում, տարբեր սարքավորումների պայմանանշանները ռադիոտեխնիկայում կամ, ասենք, երթևեկության կարգավորման նշանները ճանապարհներում և փողոցներում:

Երկրաչափական պայմանանշաններ և բանաձևային արտահայտություններ հաճախ ենք օգտագործել միջին դպրոցի երկրաչափության դասընթացում: Օրինակ՝ կետերը և ուղիղները նշանակել ենք լատինական մեծատառերով ու փոքրատառերով, եռանկյունը՝ Δ նշանով, ուղիղների ուղղահայացությունը՝ $\perp$ նշանով, զուգահեռությունը՝ $\parallel$ նշանով, կամ եռանկյան մակերեսի համար՝ $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, շրջանագծի երկարության համար՝ $C=2\pi R$ և նմանօրինակ բազմաթիվ այլ նշաններ ու բանաձևեր:

Դրանք զգալիորեն ընդլայնում են տարբեր մարդկանց նույնանման հաղորդակցման հնարավորությունները: Ընդ որում՝ դա արվում է այն բանի շնորհիվ, որ *յուրաքանչյուր նշան գործածվում է բոլորի համար միապես կապարված որոշակի պայմանավորվածությամբ:*

Ընթերցում է 3-րդ խումբը

Բերենք նշանային արտահայտման մի քանի օրինակներ, որոնք հաճախ են գործածվում տարածաչափության մեջ:

ա) $A \in a$ նշանակում է՝ «A կետն ընկած է a ուղղի վրա» (A կետը պատկանում է a ուղղին, կամ A կետը գտնվում է a ուղղի վրա): Նմանապես՝ $A \in \alpha$ նշանակում է «A կետն ընկած է α հարթության մեջ»:

բ) $a \subset \alpha$ նշանակում է՝ «a ուղիղն ընկած է α հարթության մեջ» (a ուղղի բոլոր կետերը պատկանում են α հարթությանը):

գ) $a \cap b = M$ նշանակում է՝ «a և b ուղիղները հատվում են M կետում» (M կետը միաժամանակ պատկանում է a և b ուղիղներին): Նմանապես՝ $\alpha \cap \beta = m$ նշանակում է՝ «α և β հարթությունները հատվում են m ուղիղով»:

դ) $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$ և $\alpha \parallel \beta$ արտահայտությունները համապատասխանաբար նշանակում են՝ «a ուղիղը զուգահեռ է b ուղղին» (a և b ուղիղները զուգահեռ են), «a ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը» և «α և β հարթությունները զուգահեռ են»: Նմանապես՝ $a \perp b$ և $a \perp \alpha$ արտահայտությունները նշանակում են՝ «a ուղիղն ուղղահայաց է b ուղղին» (a և b ուղիղները փոխուղղահայաց են) և «a ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը»:

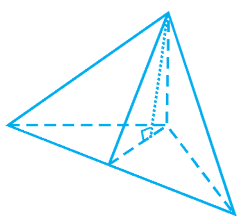
Նշանային արտահայտման բազմաթիվ այլ օրինակներ ևս կարող ենք բերել դասընթացի տարբեր թեմաներից:

Լրացուցիչ առաջադրանք: *Համեմատեք $\in$, $\subset$, $\cap$ նշանների գործածությունները հանրահաշվում և երկրաչափության մեջ և պարզեք, թե դրանք նո՞ւյն իմաստով են օգտագործվում, թե՞ ունեն տարբերություններ:*

Ընթերցում է 4-րդ խումբը

Անհրաժեշտ է որոշ նկատառումներ արտահայտել նաև գծապատկերի և նկարի վերաբերյալ, քանի որ հաղորդակցման առումով դրանք կարևոր դեր են կատարում:

Երկրաչափական պատկերներ ուսումնասիրելիս սովորաբար ասելիքն ուղեկցվում է նկարով կամ գծագրով: Դրանով դիտողական ու ընկալելի են դառնում տվյալ պատկերը, նրա տարրերն ու վերջիններիս փոխդասավորությունը: Առանձնահատուկ են հատկապես տարածական պատկերների նկարներն ու գծագրերը, քանի որ դրանք ևս կատարվում են հարթ մակերևույթի (թղթի, գրատախտակի, էկրանի և այլն) վրա: Գծապատկերման որոշ կանոնների մենք արդեն ծանոթ ենք, իսկ մի քանի այլ կանոնների հետագայում դեռևս կանդրադառնանք: Սակայն այժմ կարևոր է նշել, որ տարածական պատկերների, մասնավորապես՝ մարմինների գծապատկերումը պետք է կատարել այնպես, որ աչքի վրա տպավորություն թողնի, թե մենք, կարծես, տարածական պատկերն ենք տեսնում: Օրինակ՝ դիտելով նկար 81-ը, երբ ասում ենք, որ պատկերվածը քառանիստ է, ապա այդ դեպքում նկարում եղած գծերի տպավորության տակ մենք մտովի վերականգնում ենք առարկան և այն «տեսնում» բոլոր կողմերից ու ներսից: Առարկան նկարի կամ գծագրի հիման վրա վերակազմելիս, անշուշտ, որոշակի դեր ունի դիտողի երևակայությունը: Սակայն չպետք է մոռանալ, որ այդ տեղեկատվությունն իր մեջ կրում է հենց ինքը՝ նկարը կամ գծագիրը: Գծագրի և նկարի մեջ տեղեկատվություն կուտակելու սկզբունքն է ընկած բոլոր նախագծերի, ինչպես նաև տեսողական արվեստների հիմքում: Իսկ այդ տեղեկատվությունը ճշգրիտ կլինի, եթե տվյալ գծագիրն ու նկարը կատարվեն ու ընկալվեն երկրաչափության օրենքներին համապատասխան:



Նկ. 81

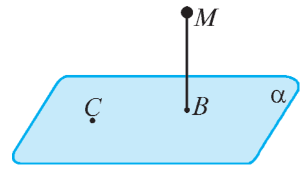
§ 10 ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

10.1. Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը

Մենք արդեն սահմանել ենք ուղղի և հարթության ուղղահայացությունը: Բնական կլինի ասել, որ եթե ուղիղը և հարթությունը փոխուղղահայաց են, ապա նրանց կազմած անկյունը 90^0 է: Իսկ ինչպե՞ս որոշել ուղղի և հարթության կազմած անկյունն այն դեպքում, երբ նրանք հատվում են, բայց ուղղահայաց չեն:

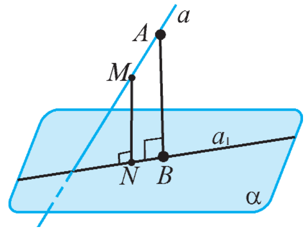
Մենք գիտենք տրված կետից հարթությանը տարված թեքի և հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի մասին: Այստեղ մեզ անհրաժեշտ կլինի գործածել ոչ միայն հատվածի, այլև ուղղի պրոյեկցիան հարթության վրա:

Նախ դիտարկենք կետի պրոյեկցիան*:



Նկ. 82

Եթե կետը գտնվում է տրված հարթությունից դուրս, ապա այդ կետի պրոյեկցիա տվյալ հարթության վրա, ինչպես գիտենք, կոչվում է նրանից հարթությանն իջեցրած ուղղահայացի հիմքը: Իսկ եթե կետն ընկած է տրված հարթության մեջ, ապա նրա պրոյեկցիան հենց ինքն է՝ այդ կետը: Նկար 82-ում M կետի պրոյեկցիան α հարթության վրա B կետն է ($MB\perp\alpha$), իսկ C կետի պրոյեկցիան՝ նույն C կետը:



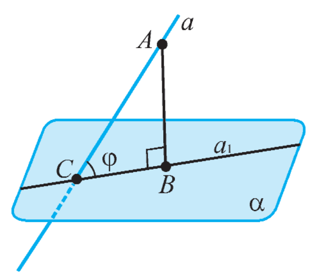
Նկ. 83

Ուղղի (նմանապես կամայական պատկերի) պրոյեկցիան տրված հարթության վրա ստանալու համար պետք է կառուցել նրա բոլոր կետերի պրոյեկցիաները այդ հարթության վրա: Պարզվում է, որ *եթե ուղիղը ուղղահայաց չէ տրված հարթությանը, ապա նրա պրոյեկցիան ևս ուղիղ գիծ է* (տե՛ս Ա-12 խնդրի լուծումը): Այն կառուցում ենք այսպես. եթե տրված հարթությունը α-ն է, իսկ նրան ոչ ուղղահայաց ուղիղը՝ a-ն (նկ. 83), ապա նախ կվերցնենք կամայական A և M կետեր a ուղղի վրա և նրանցից կիջեցնենք α հարթությանն ուղղահայացներ՝ AB-ն և MN-ը: α հարթության մեջ տանելով N և B կետերով անցնող a_1 ուղիղը՝ կստանանք a ուղղի պրոյեկցիան:

Պարզ է, որ եթե ուղիղն ուղղահայաց է տրված հարթությանը, ապա նրա պրոյեկցիան կլինի այդ ուղղի և հարթության հատման կետը:

Այժմ, օգտվելով հարթության վրա ուղղի պրոյեկցիայի հասկացությունից, սահմանենք ուղղի և հարթության կազմած անկյունը:

Սահմանում. ***Ուղղի և նրան հատող ու ոչ ուղղահայաց հարթության կազմած անկյուն կոչվում է այդ ուղղի և հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի կազմած անկյունը:***



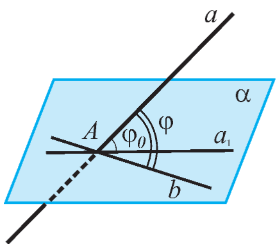
Նկ. 84

Նկար 84-ում պատկերված a ուղիղը C կետում հատում է α հարթությունը: a ուղղի վրա ընկած A կետից իջեցված է α հարթությանն ուղղահայաց AB-ն: a_1 ուղիղը (CB-ն) a ուղղի պրոյեկցիան է α հարթության վրա: $\varphi=\angle ACB$-ն a ուղղի և α հարթության կազմած անկյունն է:

Նկատի ունենալով երկու ուղիղների կազմած անկյան սահմանումը՝ նշենք, որ ուղղի և հարթության կազմած անկյունը ևս չի կարող մեծ լինել 90^0-ից:

* Այստեղ մենք կխոսենք միայն ուղղահայաց պրոյեկցիայի մասին: Դիտարկվում են նաև այլ պրոյեկցիաներ, որոնց կանդրադառնանք հաջորդ դասարանում:

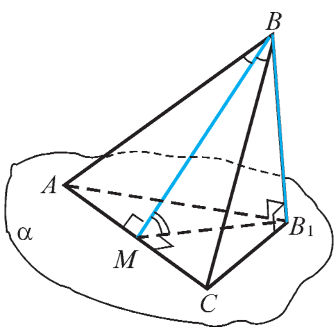
Նշենք նաև, որ եթե ուղիղը չի հատում տրված հարթությունը, այսինքն՝ նրանք զուգահեռ են, ապա զուգահեռ կլինեն նաև այդ ուղիղը և հարթության վրա նրա պրոյեկցիան: Այդ դեպքի համար ուղղի և հարթության կազմած անկյուն սովորաբար չի սահմանվում, իսկ հաճախ պայմանավորվում են ասել, որ նրանց կազմած անկյունը 0^0 է: Նույնպիսի պայմանավորվածություն է ընդունվում նաև այն դեպքի համար, երբ ուղիղն ընկած է հարթության մեջ:



Նկ. 85

Պարզաբանման կարգով ասենք, որ ինչպես կետից հարթությանն իջեցրած ուղղահայացն է օժտված փոքրագույնը լինելու հատկությամբ, այնպես էլ ուղղի և հարթության կազմած անկյունը: Այսպես, եթե *a* ուղիղը *A* կետում հատում է α հարթությունը և նրա հետ կազմում է φ_0 անկյուն, ապա φ_0-ն փոքրագույնն է այն բոլոր φ անկյուններից, որոնք կազմում է *a* ուղիղը α հարթության մեջ *A* կետով անցնող ուղիղների հետ (նկ. 85):

Դիտարկենք ուղղի և հարթության կազմած անկյանը վերաբերող հետևյալ խնդիրը:



Նկ. 86

Խնդիր. *ABC* հավասարասրուն եռանկյան *AC* հիմքն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ *B* գագաթի հեռավորությունը α հարթությունից 4 սմ է: Գտնել *ABC* անկյան կիսորդով անցնող ուղղի և α հարթության կազմած անկյունը, եթե $AB=10$ սմ, $AC=12$ սմ (նկ. 86):

Լուծում. Դիցուք՝ *ABC* եռանկյան մեջ $AB=BC=10$ սմ, $\angle ABM=\angle CBM$ և $BB_1=4$ սմ (B_1-ը BB_1 ուղղահայացի հիմքն է): Գտնելու ենք *BM* ուղղի և α հարթության կազմած φ անկյունը:

Քանի որ ΔABC-ն հավասարասրուն է, ուրեմն *BM* կիսորդը նաև բարձրություն է ($BM\perp AC$) և միջնագիծ ($AM=MC$): B_1M-ը BM-ի պրոյեկցիան է α հարթության վրա, ուրեմն որոնելի φ անկյունը $\angle BMB_1$-ն է: Այն գտնելու համար նախ գտնենք BM-ը: ΔAMB-ի մեջ $AM=AC/2$, և ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝

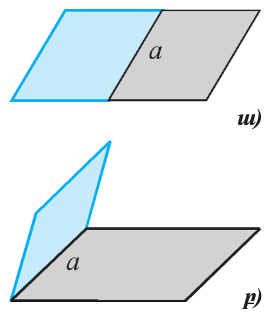
$$BM=\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8 \text{ (սմ):}$$

BB_1M ուղղանկյուն եռանկյան մեջ $\sin\varphi=\dfrac{BB_1}{BM}=\dfrac{4\text{սմ}}{8\text{սմ}}=\dfrac{1}{2}$, հետևաբար $\varphi=30^0$:

Պատասխան՝ 30^0:

10.2. Երկնիստ անկյուն: Երկու հարթությունների կազմած անկյունը

Հարթաչափության մեջ անկյուն ենք անվանել մի կետից ելնող երկու ճառագայթներով կազմված պատկերը: Դրան համանման ձևով տարածաչափության մեջ դիտարկվում են նաև երկնիստ անկյուններ: Ինչպես որ ուղղի վրա վերցված որևէ կետով այդ ուղիղը տրոհվում է երկու ճառագայթների (կիսաուղիղների), այնպես էլ հարթության մեջ վերցված որևէ ուղիղով այդ հարթությունը տրոհվում է երկու *կիսահարթությունների*: Այդ կիսահարթություններից յուրաքանչյուրի համար տվյալ ուղիղը կոչվում է *սահմանագիծ* (a ուղիղը նկ. 87, ա-ում):



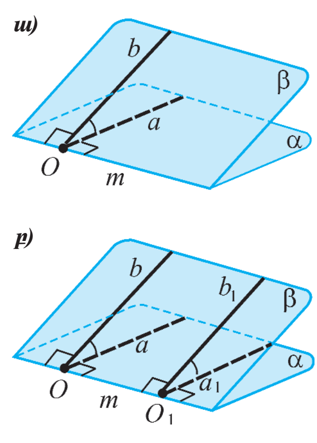
Նկ. 87

Դիտարկենք մի պատկեր, որն առաջանում է, երբ կիսահարթություններից մեկը «ծալում» ենք a ուղիղով:

Եթե ընդհանուր սահմանագծով երկու կիսահարթությունները դասավորված են այնպես, որ ընկած չեն մի հարթության մեջ, ապա նրանք կազմում են մի պատկեր, որն էլ անվանում ենք *երկնիստ անկյուն*: Այդ դեպքում կիսահարթությունները կոչվում են *երկնիստ անկյան նիստեր*, իսկ ընդհանուր սահմանագիծը՝ *երկնիստ անկյան կող* (նկ. 87, բ):

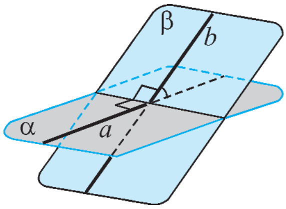
Մեր շրջակայքում կան բազմաթիվ առարկաներ, որոնք պատկերացում են տալիս երկնիստ անկյան մասին: Այդպիսի օրինակներ են տան երկփեղկ կտուրը, կիսաբաց գրքի էջերը և այլն:

Երկնիստ անկյունները չափում են հետևյալ կերպ: α և β նիստեր ունեցող երկնիստ անկյան m կողի վրա վերցնենք կամայական O կետ: Նիստերի վրա տանենք O սկզբնակետով a և b ճառագայթներն այնպես, որ դրանք ուղղահայաց լինեն m կողին (նկ. 88, ա): O գագաթով և a, b կողմերով անկյունը կոչվում է երկնիստ անկյան *գծային անկյուն*: Պարզվում է, որ *գծային անկյան մեծությունը կախված չէ նրա կողի վրա O գագաթի ընտրությունից*: Հեշտ է համոզվել, որ եթե m կողի վրա վերցնենք մեկ այլ O_1 կետ և նկարագրված ձևով կառուցենք a_1 և b_1 կողմերով և O_1 գագաթով գծային անկյունը, ապա այդ երկու անկյունները՝ $\angle O$-ն և $\angle O_1$-ը, որպես համապատասխանաբար զուգահեռ (համուղղված) կողմերով անկյուններ, կլինեն հավասար (նկ. 88, բ, տե՛ս Ա-4 խնդիրը):

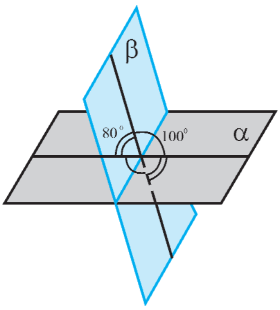


Նկ. 88

Երկնիստ անկյան մեծություն է կոչվում նրա գծային անկյան մեծությունը: Եթե երկնիստ անկյան գծային անկյունը սուր է, ուղիղ է կամ բութ, ապա



Նկ. 89



Նկ. 90

երկնիստ անկյունը ևս կոչվում է համապատասխանաբար *սուր, ուղիղ* կամ *բութ*: Հավասար գծային անկյուններ ունեցող երկնիստ անկյունները կանվանենք *հավասար երկնիստ անկյուններ*:

Երկնիստ անկյան միջոցով սահմանվում է երկու հատվող հարթությունների կազմած անկյունը, և դա ևս համանման է երկու հատվող ուղիղների կազմած անկյան սահմանմանը:

Երկու հատվող հարթություններ կազմում են ընդհանուր կող ունեցող չորս երկնիստ անկյուններ (նկ. 89): Եթե դրանցից մեկի մեծությունը հայտնի է, ապա կարող ենք որոշել նաև մյուս երեքի մեծությունները: Այդ չորս երկնիստ անկյուններից մեկը, որը մեծ չէ մյուսներից, կոչվում է *երկու հատվող հարթությունների կազմած անկյուն*: Այսպիսով, եթե α և β հարթությունների կազմած անկյունը նշանակենք $\angle\alpha\beta$, ապա $\angle\alpha\beta \le 90^0$: Օրինակ՝ նկար 90-ում պատկերված α և β հատվող հարթություններից ստացվել են երկնիստ անկյուններ, որոնցից երկուսի մեծությունը 100^0 են, մյուս երկուսինը՝ 80^0: Ուրեմն՝ $\angle\alpha\beta=80^0$:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

133. *A* կետից α հարթությանը տարված են *AB* ուղղահայացը և *AC* թեքը: Գտեք *AC*-ի կազմած անկյունը α հարթության հետ, եթե՝ **ա)** *AB*-ն 2 անգամ փոքր է *AC*-ից, **բ)** *AC*-ն 2 անգամ մեծ է *BC*-ից, **գ)** *AB*-ն և *BC*-ն հավասար են:

134. *M* կետից մի ինչ որ հարթության տարված են երկու թեքեր՝ MA_1-ը և MA_2-ը, որոնք այդ հարթության հետ կազմում են համապատասխանաբար φ_1 և φ_2 անկյուններ: Արդյոք ճշմարի՞տ են հետևյալ պնդումները՝ **ա)** եթե $MA_1=MA_2$, ապա $\varphi_1=\varphi_2$, **բ)** եթե $\varphi_1=\varphi_2$, ապա $MA_1=MA_2$, **գ)** եթե $MA_1>MA_2$, ապա $\varphi_1>\varphi_2$, **դ)** եթե $MA_1>MA_2$, ապա $\varphi_1<\varphi_2$:

135. Որոշեք հետևյալ պնդման ճշմարիտ կամ կեղծ լինելը.

ա) ուղղի և հարթության կազմած անկյունը կարող է լինել ինչպես սուր, այնպես էլ ուղիղ կամ բութ,

բ) եթե ուղիղը հարթության մեջ ընկած երկու հատվող ուղիղներից յուրաքանչյուրի հետ կազմում է φ անկյուն, ապա այդ հարթության հետ ևս կազմում է φ անկյուն,

գ) եթե *a* ուղիղը α հարթության մեջ ընկած ուղիղներից մեկի հետ կազմում է φ_1 անկյուն, իսկ մյուսի հետ φ_2 անկյուն, և $\varphi_1>\varphi_2$, ապա *a* ուղղի և α հարթության կազմած անկյունը φ_1-ի հավասար լինել չի կարող:

136. Ի՞նչ պայմանների դեպքում է ճշմարիտ նախորդ վարժության մեջ բերված բ) պնդումը:

137. A կետից α հարթությանը տարված է $8\sqrt{3}$ սմ երկարությամբ թեք, որն այդ հարթության հետ կազմում է 60^0 անկյուն: Գտեք՝ **ա)** α հարթության վրա այդ թեքի պրոյեկցիայի երկարությունը, **բ)** A կետի հեռավորությունը α հարթությունից:

138. Հարթությունից 10 սմ հեռավորություն ունեցող կետից այդ հարթությանը տարված են երկու փոխուղղահայաց թեքեր, որոնք հարթության հետ կազմում են 30^0 և 45^0 անկյուններ: Գտեք այդ թեքերի հիմքերի հեռավորությունը:

139. Ուղղանկյուն հավասարասրուն եռանկյան մի էջն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ մյուս էջն այդ հարթության հետ կազմում է 45^0 անկյուն: Ապացուցեք, որ ներքնաձիգի և այդ հարթության կազմած անկյունը 30^0 է:

140. $\angle AMB$-ն և $\angle CND$-ն տրված երկնիստ անկյան երկու գծային անկյուններ են: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն՝ **ա)** երկնիստ անկյան կողը և AMB հարթությունը, **բ)** AMB և CND հարթությունները: Պատասխանը հիմնավորեք:

141. a ուղիղով անցնում են երեք հարթություններ: Այդ դեպքում քանի՞ երկնիստ անկյուն են առաջանում, որոնց համար a-ն կող է:

142. AB ընդհանուր ներքնաձիգով ABC և ABD հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյունները կազմում են AB կողով 60^0-ի երկնիստ անկյուն: Գտեք C և D գագաթների հեռավորությունը, եթե AB=8 սմ:

143. Սարի հյուսիսային և հարավային լանջերն ունեն հավասար թեքություն: Հյուսիսից հարավ ձգվող երկաթուղին այդ սարը հատում է գագաթի տակից անցնող հորիզոնական թունելով, որի երկարությունը 1 կմ է, իսկ սարի գագաթի բարձրությունը թունելի մակարդակից 500 մ է: Ի՞նչ անկյուն են կազմում այդ սարալանջերն իրար հետ:

144. Դուռը բացված է այնքան, որ նրա՝ պատի հետ կազմած երկնիստ անկյուններից մեկը 4 անգամ մեծ է մյուսից: Որքա՞ն է դռան և պատի հարթությունների կազմած անկյունը:

145. A կետը գտնվում է ուղիղ անկյուն կազմող հարթություններից մեկից 5 դմ, մյուսից՝ 12 դմ հեռավորության վրա: Գտեք A կետի հեռավորությունը այդ հարթությունների հատման գծից:

146. Քառակուսու կողմերից մեկն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ նրա անկյունագիծն այդ հարթության հետ կազմում է 30^0 անկյուն: Գտեք քառակուսու հարթության և α հարթության կազմած անկյունը:

147. Քառանիստի բոլոր նիստերը հավասարակողմ եռանկյուններ են: Գտեք նրա որևէ երկու նիստերն ընդգրկող հարթությունների կազմված անկյան կոսինուսը:

148*. AB=26 սմ հատվածի ծայրակետերը գտնվում են 90^0-ի հավասար երկնիստ անկյան նիստերի վրա: Հատվածի ծայրակետերից երկնիստ անկյան կողին տարված են AC և BD ուղղահայացները, AC=6 սմ, BD=24 սմ: Գտեք CD հատվածի երկարությունը:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

Ընթերցեք հետևյալ տեքստը:

Ուղիղների և հարթությունների զուգահեռությունն ու ուղղահայացությունն ունեն կիրառական մեծ նշանակություն: Մասնավորապես, ուղղահայացության միջոցով են որոշվում հեռավորությունները և անկյունները տարածության մեջ: Սակայն կարևոր է նկատել, որ դրանց հիմքում ընկած են հատվածի երկարության և հարթ անկյան (մի կետից ելնող ճառագայթներով կազմված անկյան) հասկացությունները, որոնք մենք ուսումնասիրել ենք հարթաչափության դասընթացում:

Բանն այն է, որ երկու կետերի, կետի և ուղղի, երկու զուգահեռ ուղիղների, զուգահեռ ուղղի ու հարթության, երկու զուգահեռ հարթությունների և առհասարակ պատկերների միջև հեռավորությունները, ի վերջո, որոշվում են հատվածի երկարության միջոցով: Նմանապես՝ երկու ուղիղների, ուղղի և հարթության, երկու հարթությունների կազմած անկյունները, ի վերջո, որոշվում են հարթ անկյան մեծության միջոցով:

ա) ***Տեքստից ընտրեք 5 բանալի-բառեր, այսինքն՝ այնպիսի բառեր, որոնք, ըստ ձեզ, ամենաէականն են տվյալ տեքստի բովանդակությունն արտահայտելու համար:***

բ) ***Փորձեք մեկ նախադասությամբ արտահայտել տվյալ տեքստի հիմնական գաղափարը:***

§ 11 ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

11.1. Հարթությունների ուղղահայացությունը

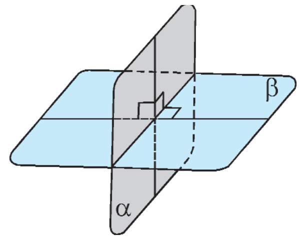
Եթե երկու հատվող α և β հարթությունների կազմած չորս երկնիստ անկյուններից մեկը 90^0 է, ապա մյուս երեքը ևս կլինեն 90^0: Այդ դեպքում ասում են, որ α և β հարթությունները *ուղղահայաց են* (նկ. 91) և նշանակում են $\alpha \perp \beta$:

Այսպիսով, *երկու հատվող հարթությունները կոչվում են ուղղահայաց (փոխուղղահայաց), եթե նրանց կազմած անկյունը ուղիղ անկյուն է:*

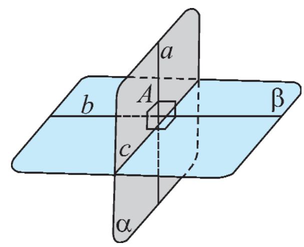
Երկու հարթությունների ուղղահայացությունը պարզելու համար օգտվում են հետևյալ *հայտանիշից*.

Թեորեմ. ***Եթե երկու հարթություններից մեկն անցնում է մյուս հարթությանն ուղղահայաց ուղիղով, ապա այդպիսի հարթություններն ուղղահայաց են:***

Ապացուցում. Դիցուք՝ α հարթությունն անցնում է *a* ուղիղով, որն *A* կետում հատում է β հարթությունը և ուղղահայաց է նրան (նկ. 92): Այդ դեպքում *a* ուղիղն ուղղահայաց կլինի β հարթության ցանկացած ուղղին, այդ թվում նաև α և β հարթությունների հատման *c* ուղղին: *A* կետով β հարթության մեջ տանենք *c* ուղղին ուղղահայաց *b* ուղիղը: *a* ուղիղն ուղղահայաց է նաև β հարթության մեջ ընկած *b* ուղղին: Ուրեմն՝ α և β հարթությունների կազմած երկնիստ անկյան գծային անկյունն ուղիղ անկյուն է: Դրանից հետևում է, որ դրանք ուղղահայաց հարթություններ են՝ α⊥β, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:



Նկ. 91



Նկ. 92

Այս հայտանիշն ունի գործնական մեծ կիրառություն: Օրինակ՝ եթե պատին ամրացված դռան շրջանակի կողափայտն ուղղահայաց է հատակին, ապա դռան հարթությունը միշտ ուղղահայաց կլինի հատակի հարթությանը՝ անկախ նրանից, թե դուռը փակ է, բաց կամ կիսաբաց (նկ. 93): Մեկ այլ օրինակ է, երբ ուզում ենք պարզել որևէ մակերևույթի, ասենք, պատի (կամ ցանկապատի) ուղղահայացությունը գետնի հարթությանը: Այդ դեպքում օգտագործվում է *ուղղալար* (թելին կապված ծանրոց): Եթե կախված ուղղալարը շեղված չէ պատից, ուրեմն պատը ուղղահայաց է գետնի հարթությանը:

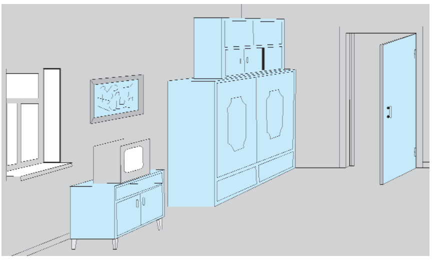
Ծանոթություն

Երկու հարթությունների ուղղահայացության բավարար պայմանը, որն արտահայտված է ուղղահայացության հայտանիշով, նաև անհրաժեշտ պայման է: Այսինքն՝ *եթե երկու հարթություններ ուղղահայաց են, ապա հարթություններից մեկում ընկած ուղիղը, որն ուղղահայաց է հարթությունների հատման գծին, ուղղահայաց է նաև մյուս հարթությանը:*

Դա նշանակում է, որ եթե α հարթությունն ուղղահայաց է β հարթությանը, ապա α-ն անցնում է այնպիսի ուղիղով, որն ուղղահայաց է β հարթությանը: Իսկապես, եթե α հարթության մեջ վերցնենք այն *a* ուղիղը, որն ուղղահայց է α և β հարթությունների հատման *c* ուղղին (տե՛ս նկ. 92-ը), ապա դժվար չէ համոզվել, որ *a* ուղիղն ուղղահայաց է β հարթությանը:

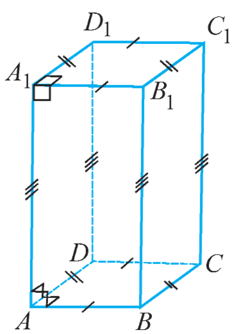
11.2. Ուղղանկյունանիստ

Մեր շրջակայքի առարկաներից շատերն ունեն այնպիսի զուգահեռանիստի տեսք, որի բոլոր նիստերն ուղղանկյուններ են: Այդպիսի առարկաներ են շենքերը, սենյակները, պահարանները, տուփերը, գրքերը և այլն (տե՛ս նկ. 93):



Նկ. 93

Զուգահեռանիստը, որի կողմնային կողերն ուղղահայաց են հիմքերին, կոչվում է *ուղիղ զուգահեռանիստ: Իսկ այն ուղիղ զուգահեռանիստը, որի հիմքերն ուղղանկյուններ են, կոչվում է ուղղանկյուն զուգահեռանիստ կամ պարզապես՝ ուղղանկյունանիստ:* Նկար 94-ում պատկերված $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի համար որպես հիմքեր են վերցված $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունները, իսկ AA_1, BB_1, CC_1 և DD_1 կողմնային կողերն ուղղահայաց են հիմքերին: Դա նշանակում է, որ կողմնային նիստերից յուրաքանչյուրը ևս ուղղանկյուն է, այսինքն՝ *ուղղանկյունանիստի բոլոր վեց նիստերն ուղղանկյուններ են*:



Նկ. 94

Ուղղանկյունանիստի յուրաքանչյուր գագաթից ելնում են երեք կողեր: Նկար 94-ում ցույց է տրված, որ ցանկացած երկու գագաթով ելնող երեքական կողերը համապատասխանաբար հավասար են իրար: Ընդունված է ուղղանկյունանիստի ընդհանուր գագաթով երեք կողերի երկարություններն անվանել ուղղանկյունանիստի *չափեր* (առօրյայում դրանց երբեմն անվանում են ուղղանկյունանիստի երկարություն, լայնություն և բարձրություն):

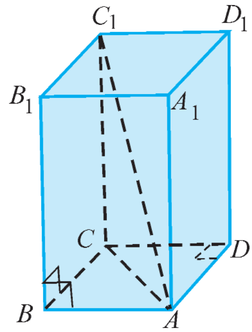
Ուղղանկյունանիստը, որի երեք չափերը հավասար են, կոչվում է *խորանարդ*: Պարզ է, որ խորանարդի բոլոր նիստերը միմյանց հավասար քառակուսիներ են:

Զուգահեռանիստը, ուղղանկյունանիստը և խորանարդը երբեմն դիտվում են որպես համապատասխանաբար զուգահեռագծի, ուղղանկյան և քառակուսու տարածական նմանակներ: Պարզվում է, որ դրանց միջև, իրոք, կան որոշակի հատկությունների համանմանություններ: Զուգահեռանիստի և զուգահեռագծի համար այդպիսի համանմանության օրինակ մենք արդեն գիտենք. և՛ մեկի, և՛ մյուսի անկյունագծերը հատվում են մի կետում և հատման կետով կիսվում են:

Այժմ ցույց տանք հատկությունների մեկ այլ համանմանություն ուղղանկյունանիստի և ուղղանկյան համար: Հիշենք, որ ուղղանկյան անկյունագծերը հավասար են, ընդ որում՝ անկյունագծի քառակուսին հավասար է ուղղանկյան երկու չափերի քառակուսիների գումարին:

Դիտարկենք անկյունագծերի հետ կապված նույնատիպ հարց ուղղանկյունանիստի համար:

Դիցուք՝ AC_1-ը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի անկյունագծերից մեկն է (նկ. 95): Քանի որ C_1C-ն ուղղահայաց է հիմքին, ուրեմն C_1C-ն ուղղահայաց է հիմքի հարթության ցանկացած ուղղին, այդ թվում և CA-ին: Այսինքն՝ C_1CA եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է, և ըստ Պյութագորասի թեորեմի՝ $AC_1^2=CC_1^2+CA^2$: Մյուս կողմից՝ ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ, դարձյալ ըստ Պյութագորասի թեորեմի, $CA^2=AB^2+BC^2$: Եթե հաշվի առնենք նաև, որ $BC=AD$ և $CC_1=AA_1$, ապա ստանում ենք՝ $AC_1^2=AB^2+AD^2+AA_1^2$: AB-ն, AD-ն և AA_1-ը ուղղանկյունանիստի երեք չափսերն են: Ուրեմն՝ կարող ենք ձևակերպել.



Նկ. 95

Ուղղանկյունանիստի անկյունագծի քառակուսին հավասար է նրա երեք չափսերի քառակուսիների գումարին:

Նշենք, որ ուղղանկյունանիստի անկյունագծի վերաբերյալ ապացուցված պնդումը վերաբերում է նրա անկյունագծերից յուրաքանչյուրին: Դրանից բխում է. *ուղղանկյունանիստի բոլոր անկյունագծերը հավասար են*: Ինչպես տեսնում ենք, ուղղանկյունանիստի և ուղղանկյան միջև, իրոք, առկա է հատկությունների որոշակի համանմանություն:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

149. Արդյոք ճշմարի՞տ է հետևյալ պնդումը.

ա) տրված կետով անցնում է տրված հարթությանն ուղղահայաց միայն մեկ ուղիղ,

բ) տրված կետով անցնում է տրված հարթությանն ուղղահայաց միայն մեկ հարթություն,

գ) եթե մի հարթությունն անցնում է ուղիղով, որն ուղղահայաց է մյուս հարթության մեջ ընկած երկու ուղիղների, ապա այդ հարթությունները փոխուղղահայաց են,

դ) եթե ուղիղն ուղղահայաց է երկու հատվող հարթությունների հատման գծին, ապա ուղղահայաց է նաև այդ հարթություններին,

ե) եթե հարթությունն ուղղահայաց է երկու հատվող հարթությունների հատման գծին, ապա ուղղահայաց է նաև այդ հարթություններին:

150. a ուղիղը α և β փոխուղղահայաց հարթությունների հատման գիծն է, իսկ A-ն՝ a ուղղի վրա ընկած որևէ կետ: A կետով անցնող քանի՞ հարթություն է հնարավոր տանել այնպես, որ՝

ա) ուղղահայաց լինի α հարթությանը,

բ) ուղղահայաց լինի a ուղղին,

գ) ուղղահայաց լինի α և β հարթություններին,

դ) ուղղահայաց լինի a ուղղին և β հարթությանը,

ե) ուղղահայաց լինի α և β հարթություններին, բայց ուղղահայաց չլինի a ուղղին:

151. a ուղիղը և α հարթությունն ուղղահայաց են նույն β հարթությանը: Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն կարող են ունենալ a ուղիղն ու α հարթությունը:

152. M-ը ABC ուղղանկյուն հավասարասրուն եռանկյան AC ներքնաձիգի միջնակետն է: DM-ը ուղղահայաց է այդ եռանկյան հարթությանը: Նշեք փոխուղղահայաց այն հարթությունները, որոնցից յուրաքանչյուրն անցնում է նշված A, B, C, D, M կետերից որևէ երեքով:

153. $SABC$ քառանիստի բոլոր նիստերը հավասարակողմ եռանկյուններ են, M-ը AB կողի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ ABC և SMC հարթությունները փոխուղղահայաց են:

154. $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը տրված ուղղանկյունանիստ է: Նշեք նրա կողերն ընդգրկող այն ուղիղները, որոնք՝

ա) զուգահեռ են AB ուղղին,

բ) խաչվող են AB ուղղի հետ,

գ) ուղղահայաց են AB ուղղին,

դ) զուգահեռ են ABC հարթությանը,

ե) ուղղահայաց են ABC հարթությանը:

155. $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը տրված խորանարդ է: Նշեք քառակուսի չհանդիսացող այն ուղղանկյունները, որոնց բոլոր գագաթներն այդ խորանարդի գագաթներ են:

156. Խորանարդի կողը 1 սմ է: Գտեք նրա անկյունագիծը:

157. Գտեք ուղղանկյունանիստի անկյունագծերը, եթե նրա չափսերն են՝

ա) 1 սմ, 2 սմ, 2 սմ, **բ)** 4 սմ, 4,5 սմ, 6 սմ, **գ)** 20 սմ, 3 դմ, 6 դմ:

158. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի մեջ $AB=2$ սմ, $A_1D_1=1$ սմ, $CC_1=2$ սմ: Գտեք՝ **ա)** ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը, **բ)** A գագաթով նիստերի անկյունագծերը:

159. Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը 13 սմ է, իսկ հիմքի անկյունագիծը՝ 5 սմ: Գտեք նրա կողմնային կողի երկարությունը:

160. Ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը հիմքի հարթության հետ կազմում է 45^0 անկյուն, իսկ հիմքի երկու կողմերը 6 դմ և 8 դմ են: Գտեք ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը և կողմնային կողը:

161. Գտեք 4 սմ կող ունեցող խորանարդի անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը խորանարդի՝ **ա)** նիստերից, **բ)** կողերից, **գ)** գագաթներից:

162. Ուղղանկյունանիստի հիմքի երկու կողմերը հավասար են 3 սմ և 4 սմ, իսկ կողմնային կողը՝ $5\sqrt{3}$ սմ: Գտեք այդ ուղղանկյունանիստի՝

ա) անկյունագծի՝ հիմքի հարթությունների հետ կազմած անկյունը, **բ)** անկյունագծային (այսինքն՝ հանդիպակաց կողմնային կողերով անցնող) հատույթի մակերեսը:

163. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի մեջ AB=6 սմ, AD=8 սմ: Գտեք D կետի հեռավորությունը AA_1C հարթությունից:

164. Սենյակի բարձրությունը 3 մ է, իսկ հատակը քառակուսի է, որի կողմը 4 մ է: Գտեք սենյակի՝ **ա)** անկյունագիծը, **բ)** պատի անկյունագիծը, **գ)** որևէ պատի անկյունագծերի հատման կետի հեռավորությունը հատակի անկյունագծերի հատման կետից:

165. $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը ուղիղ զուգահեռանիստ է, որի հիմքերը շեղանկյուններ են:

ա) Ի՞նչ պատկերներ են նրա կողմնային նիստերը:

բ) Ի՞նչ պատկեր են անկյունագծային հատույթները (AA_1C_1C և BB_1D_1D քառանկյունները):

գ) Ինչպիսի՞ փոխդասավորություն ունեն AA_1C և BB_1D հարթությունները:

166. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղիղ զուգահեռանիստի հիմքը $ABCD$ շեղանկյունն է, որում $\angle A=60^0$, AB=5 սմ: Գտեք BB_1 ուղղի հեռավորությունը AA_1C հարթությունից:

167. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի կողը 6 սմ է: Գտեք խորանարդի՝ **ա)** անկյունագծային հատույթի մակերեսը, **բ)** այն հատույթի մակերեսը, որն անցնում է AB կողով և CC_1 կողի միջնակետով, **գ)** այն հատույթի պարագիծը, որն անցնում է AB կողով և $ABCD$ նիստի հետ կազմում է 30^0 անկյուն:

168. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի հիմքը 4 սմ կողմով քառակուսի է, իսկ կողմնային կողը 8 սմ է: Գտեք՝ **ա)** AA_1 կողի հեռավորությունը BB_1D_1 հարթությունից, **բ)** B գագաթի հեռավորությունը A_1C_1 ուղղից, **գ)** այն հատույթի պարագիծը, որն անցնում է AB կողով և հիմքի հարթության հետ կազմում է 60^0 անկյուն:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

Խորանարդի բոլոր նիստերը ներկված են: Մի գագաթից ելնող կողերը նշագծումով բաժանել են 3-ական հավասար հատվածների, և այդ նշված կետերով տարել են հատույթներ այնպես, որ խորանարդը տրոհվել է 27 խորանարդիկների: Որոշեք այն խորանարդիկների քանակը, որոնք ունեն՝ ա) ներկված 3 նիստ, բ) ներկված 2 նիստ, գ) ներկված 1 նիստ, դ) ներկված ոչ մի նիստ:

Դիտարկեք խնդիրը նաև այն դեպքերի համար, երբ խորանարդի կողերը բաժանվել են 4-ական, 5-ական և ընդհանրապես *n*-ական հատվածների:

Լրացուցիչ հարցեր և խնդիրներ
Գլուխ II-ի վերաբերյալ

169. Հարթ տեղանքում 2,4 մ հեռավորության վրա ուղղահայաց դիրքով կանգնեցված են երկու սյուն՝ մեկը 3 մ, մյուսը 2 մ երկարությամբ: Գտեք այդ սյուների վերևի ծայրերի հեռավորությունը:

170. AB հատվածը C միջնակետում հատում է α հարթությունը: Ապացուցեք, որ A և B կետերը հավասարահեռ են α հարթությունից:

171. Հատվածի ծայրակետերի հեռավորությունները տրված հարթությունից հավասար են 1 սմ և 5 սմ: Որքա՞ն է այդ հատվածի միջնակետի հեռավորությունը հարթությունից (նկատի ունեցեք, որ հնարավոր են երկու դեպք):

172. α հարթությանը չհատող $ABCD$ զուգահեռագծի A, B և C գագաթները α հարթությունից ունեն համապատասխանաբար 3 սմ, 15 սմ և 18 սմ հեռավորություն: Գտեք D գագաթի հեռավորությունը α հարթությունից:

173. S կետը հավասարահեռ է քառակուսու գագաթներից: O-ն այդ քառակուսու անկյունագծերի հատման կետն է: Ապացուցեք, որ SO-ն ուղղահայաց է քառակուսու հարթությանը:

174. S կետի հեռավորությունը քառակուսու յուրաքանչյուր գագաթից 10 դմ է, իսկ յուրաքանչյուր կողմից՝ 8 դմ: Գտեք S կետի հեռավորությունը քառակուսու հարթությունից:

175. $ABCD$ քառանիստում BC կողի միջնակետը M կետն է, և $AB=AC$, $BD=DC$: Ապացուցեք, որ BC ուղիղն ուղղահայաց է ADM հարթությանը:

176. Հարթությունից a հեռավորություն ունեցող կետից այդ հարթությանը տարված են երկու թեքեր, որոնցից յուրաքանչյուրը հարթության հետ կազմում են 30^0 անկյուն, իսկ նրանց պրոյեկցիաներն այդ հարթության վրա կազմում են 120^0 անկյուն: Գտեք թեքերի հիմքերի հեռավորությունը:

177*. $ABCD$ շեղանկյան կողմերից մեկով տարված է α հարթությունն այնպես, որ AB կողմը նրա հետ կազմում է 30^0 անկյուն: Գտեք շեղանկյան հարթության և α հարթության կազմած անկյունը, եթե շեղանկյան սուր անկյունը 45^0 է:

178*. Տրված հարթության մեջ գտեք այն կետերը, որոնք հավասարահեռ են տրված երկու կետերից:

179*. Ապացուցեք, որ երկու հատվող հարթությունների կազմած անկյունը հավասար է այդ հարթություններին տարված ուղղահայաց ուղիղների կազմած անկյանը:

180. ABC ուղղանկյուն եռանկյան հարթությանը տարված են b ուղղահայաց ուղիղը, որն անցնում է B գագաթով, և α ուղղահայաց հարթությունը, որն անցնում է AC ներքնաձիգով: Գտեք b ուղղի և α հարթության հեռավորությունը, եթե AB=15 սմ, AC=25 սմ:

181. Ընդհանուր հատման կետ ունեցող a, b և c ուղիղները զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց են: Ապացուցեք, որ a և b ուղիղներով անցնող հարթությունն ուղղահայաց է b և c ուղիղներով անցնող հարթությանը:

182*. AB=25 սմ հատվածի ծայրակետերը գտնվում են 60^0-ի հավասար երկնիստ անկյան նիստերի վրա: Հատվածի ծայրակետերից երկնիստ անկյան կողին տարված են AC և BD ուղղահայացները. AC=5 սմ, BD=8 սմ: Գտեք C և D կետերի հեռավորությունը:

183. Քառակուսաձև հիմք ունեցող ուղղանկյունանիստի անկյունագիծը 10 սմ է և կողմնային նիստի հարթության հետ կազմում է 60^0-ի անկյուն: Գտեք հիմքի կողը:

184*. $SABC$ քառանիստի S գագաթին հարակից հարթ անկյուններն ուղիղ անկյուն են, և SB=12 սմ, SC=9 սմ: K կետը SA կողը տրոհում է SK:KA=2:1 հարաբերությամբ հատվածների: Գտեք քառանիստի այն հատույթի պարագիծը, որն անցնում է K կետով և ուղղահայաց է SA կողին:

185*. Խորանարդի հատույթն անցնում է կողերից մեկով և այդ կողն ընդգրկող նիստի հետ կազմում է φ երկնիստ անկյուն: Գտեք այդ հատույթի մակերեսը, եթե խորանարդի կողը հավասար է a:

186*. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի DD_1C_1C կողմնային նիստը քառակուսի է, DC=3 սմ, $BD_1=\sqrt{22}$ սմ: **ա)** Գտեք BC-ն: **բ)** Ապացուցեք, որ BCD_1 և DC_1B_1 հարթությունները փոխուղղահայաց են: **գ)** Հաշվեք հիմքին ուղղահայաց այն հատույթի մակերեսը, որն անցնում է B գագաթով և CD կողի միջնակետով:

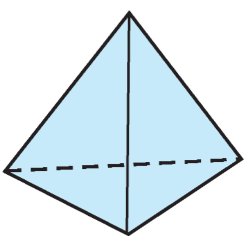
ԳԼՈՒԽ III

ԲԱԶՄԱՆԻՍՏԵՐ

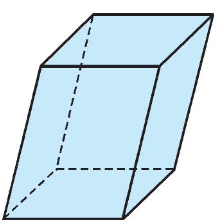
§ 12 ՊՐԻԶՄԱ

12.1. Գաղափար բազմանիստի մասին

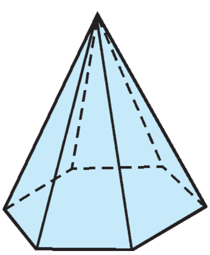
Մեզ շրջապատող առարկաներից յուրաքանչյուրը զբաղեցնում է տարածության մի մաս, և դրանք առանձնանում են իրենց մակերևույթով: Բազմաթիվ առարկաներ (շինություններ, սարքավորումներ, կենցաղային և այլ իրեր) ունեն այնպիսի տեսք, որ բոլոր կողմերից սահմանափակված են հարթության մաս հանդիսացող պատկերներով: Ուշագրավ են, օրինակ, բյուրեղային մարմինները, որոնց յուրաքանչյուրի մակերևույթը կազմված է տարբեր բազմանկյուններից: Ուսումնասիրենք այդպիսի տեսք ունեցող պատկերները:



Նկ. 96



Նկ. 97



Նկ. 98

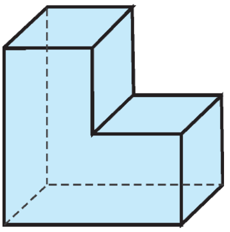
Մենք արդեն դիտարկել ենք քառանիստը և զուգահեռանիստը, ինչպես նաև զուգահեռանիստի մասնավոր դեպքեր հանդիսացող ուղղանկյունանիստը և խորանարդը: Քառանիստի մակերևույթը կազմված է եռանկյուններից (նկ. 96), զուգահեռանիստի մակերևույթը՝ քառանկյուններից (նկ. 97): Նկար 98-ում պատկերված է ևս մեկ մարմին, որի մակերևույթը կազմված է վեցանկյունից և եռանկյուններից: Նշված մակերևույթներից յուրաքանչյուրը կազմված է բազմանկյուններից: Ընդ որում՝ դրանցով բոլոր կողմերից սահմանազատվում է տարածության մի մաս, որը ներկայացնում է երկրաչափական մարմին:

Բազմանկյուններից կազմված այն մակերևույթը, որով տարածության մեջ սահմանափակվում է որևէ երկրաչափական մարմին, կանվանենք *բազմանիստ մակերևույթ* կամ, պարզապես, *բազմանիստ:* Բազմանիստ մակերևույթ կազմող բազմանկյունները կոչվում են *բազմանիստի նիստեր*, ընդ որում՝ հարևան (այսինքն՝ ընդհանուր կողմ ունեցող) նիստերը մի հարթության մեջ չեն գտնվում: Նիստերի կողմերը կոչվում են *բազմանիստի կողեր*, իսկ կողերի ծայրակետերը՝ *բազմանիստի գագաթներ*: Նկատենք, որ բազմանիստի յուրաքանչյուր կող ընդհանուր կողմ է միայն երկու նիստերի համար, իսկ յուրաքանչյուր գագաթ ընդհանուր գագաթ է առնվազն երեք նիստերի համար, որոնք ընկած են տարբեր հարթությունների մեջ:

Բազմանիստը հաճախ անվանում են՝ նշելով նրա նիստերի թիվը, օրինակ՝ քառանիստ, հնգանիստ, վեցանիստ և այլն: Միևնույն նիստին չպատկանող գագաթները միացնող հատվածը կոչվում է *բազմանիստի անկյունագիծ*: Օրինակ՝ զուգահեռանիստը, ինչպես գիտեք, ունի չորս անկյունագիծ, իսկ քառանիստը կամ նկար 98-ում պատկերված յոթանիստը (վեցանկյուն բուրգը) անկյունագիծ չունեն:

Բազմանիստ մակերևույթը, ինչպես ասվեց, սահմանափակում է մի որևէ երկրաչափական մարմին, որն անվանվում է *բազմանիստ մարմին* (հաճախ, հակիրճ արտահայտվելու համար, այն նույնպես անվանվում է *բազմանիստ*): Բազմանիստ մարմնի կետերի մի մասը *սահմանային*, իսկ մյուս մասը ներքին կետեր են: Մարմնի սահմանային կետերը նրա մակերևույթի կետերն են: Դրանց համար բնորոշ է այն, որ իրենց ցանկացած շրջակայքում* կան մարմնին ինչպես պատկանող, այնպես էլ չպատկանող կետեր: Մինչդեռ ներքին կետերի համար բնորոշ է այն, դրանց բավականաչափ փոքր շրջակայքում գտնվող բոլոր կետերը պատկանում են մարմնին:

Բազմանիստերը լինում են *ուռուցիկ* և *ոչ ուռուցիկ*: Ուռուցիկ բազմանիստը բնորոշվում է նրանով, որ այն դասավորված է ցանկացած նիստով անցնող հարթության մի կողմում: Օրինակ՝ նկար 96-ում, 97-ում և 98-ում պատկերված քառանիստը, զուգահեռանիստը և յոթանիստը ուռուցիկ բազմանիստեր են, իսկ նկար 99-ում պատկերված բազմանիստը ոչ ուռուցիկ է: Դժվար չէ պատկերացնել, որ ուռուցիկ բազմանիստի ցանկացած երկու կետերը միացնող հատվածն ամբողջությամբ ընդգրկված է այդ մարմնի մեջ, իսկ ոչ ուռուցիկ բազմանիստի համար այդ պայմանը չի բավարարվում: Մենք կուսումնասիրենք հիմնականում ուռուցիկ բազմանիստերը:



Նկ. 99

Ծանոթություն

Երկրաչափական մարմիններն օժտված են մի քանի էական հատկանիշներով: Հատկանիշներից մեկն այն է, որ յուրաքանչյուր երկրաչափական մարմին *սահմանափակ* է. դա նշանակում է, որ այն կարելի է առնել որևէ գնդային մակերևույթի մեջ: Օրինակ, ցանկացած քառանիստը կամ զուգահեռանիստը սահ-

* *Կետի շրջակայք* ասելով՝ կարելի է հասկանալ, օրինակ, այն գնդի կետերը, որի կենտրոնը տվյալ կետն է:

մանափակ է, իսկ, ասենք, երկնիստ անկյունը, որը կազմված է երկու կիսահարթություններից, սահմանափակ չէ (հնարավոր չէ կիսահարթությունը «տեղավորել» որևէ գնդի մեջ):

Երկրաչափական մարմնի մյուս էական հատկանիշն այն է, որ *կապակցված պատկեր* է, այսինքն՝ նրա ցանկացած երկու կետերը կարելի է միացնել այնպիսի անընդհատ գծով, որն ամբողջությամբ ընդգրկված է այդ պատկերի մեջ: Հեշտ է համոզվել, որ, օրինակ, երկու զուգահեռ հարթություններից կազմված պատկերը կապակցված չէ և, ուրեմն, այն երկրաչափական մարմին չէ, իսկ, ասենք, զուգահեռանիստը կապակցված է:

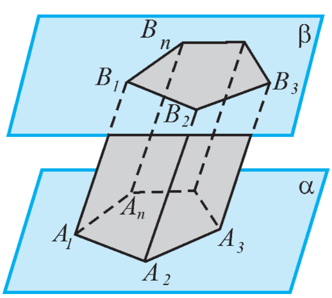
Նշենք նաև, որ երկրաչափական մարմնի համար էական է նաև այն, որ նրա *բոլոր սահմանային կետերը պարկանում են իրեն*: Ընդ որում, ինչպես արդեն ասվել է, սահմանային կետերի մոտ ցանկացած փոքր շրջակայքում կան նաև ներքին կետեր:

Այսպիսով, տրված պատկերի՝ երկրաչափական մարմին լինելը որոշելու համար պետք է պարզել, թե այն սահմանափա՞կ է, կապակցվա՞ծ է և արդյոք պարունակո՞ւմ է բոլոր սահմանային կետերը: Նշված պայմաններից թեկուզ մեկի բացակայությունը բավարար է ասելու համար, որ այդ երկրաչափական պատկերը մարմին չէ:

Այս գլխում մենք կդիտարկենք միայն այնպիսի երկրաչափական մարմիններ, որոնց մակերևույթը կազմված է վերջավոր թվով բազմանկյուններից:

12.2. Պրիզմայի հասկացությունը

Դիտարկենք այնպիսի բազմանիստ, որը ստացվում է հետևյալ կերպ: Վերցնենք երկու հավասար բազմանկյուններ՝ $A_1A_2\ldots A_n$-ը և $B_1B_2\ldots B_n$-ը, որոնցից յուրաքանչյուրը գտնվում է երկու զուգահեռ հարթություններից մեկի մեջ: Դիցուք՝ այդ բազմանկյունները դասավորված են այնպես, որ մի բազմանկյան A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 կողմերը համապատասխանաբար հավասար և զուգահեռ են մյուս բազմանկյան B_1B_2, B_2B_3, … B_nB_1 կողմերին (նկ. 100): Հատվածներով միացնենք A_1 և B_1, A_2 և B_2, …, A_n և B_n կետերը: Արդյունքում ստացվում են $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, …, $A_nB_nB_1A_1$ քառանկյունները, որոնցից յուրաքանչյուրը զուգահեռագիծ է, քանի որ երկու հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ են և հավասար: Վերցված երկու բազմանկյունները և ստացված զուգահեռագծերը կազմում են մի բազմանիստ, որը կոչվում է *n-անկյուն պրիզմա**:

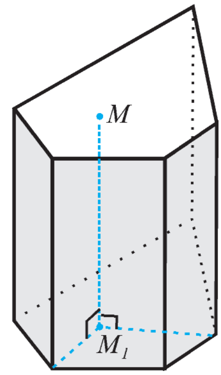


Նկ. 100

* Նկատի ունենալով, որ տվյալ մարմինը բոլոր կողմերից հատած է, հայկական հին դասագրքերում պրիզման անվանել են *հատվածակողմ* (ինչպես նաև *հատվածքակողմ*): Այդպիսի անվանումը երբեմն շրջանառվում է նաև ներկայումս:

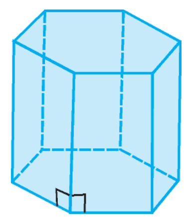
Այսպիսով, n-անկյուն պրիզմայի մակերևույթը կազմված է n+2 նիստերից: Դրանցից երկուսը՝ զուգահեռ հարթություններում ընկած n-անկյուն բազմանկյունները, կոչվում են պրիզմայի *հիմքեր*: Մյուս n հատ նիստերը՝ զուգահեռագծերը, կոչվում են *պրիզմայի կողմնային նիստեր*:

Պրիզման հաճախ պատկերվում է այնպես, որ այն «կանգնած» է լինում հիմքերից մեկի վրա (նկ. 101): Այդ դեպքում մի հիմքը կոչվում է *վերին*, իսկ մյուսը՝ *ստորին* հիմք: Հիմքերից մեկի որևէ կետից մյուս հիմքի հարթությանը տարված ուղղահայացը կոչվում է *պրիզմայի բարձրություն* (օրինակ՝ MM_1-ը նկ. 101-ում):



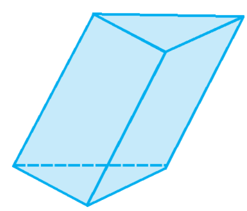
Նկ. 101

Պրիզմայի բոլոր այն կողերը, որոնք ընկած չեն հիմքերում, կոչվում են *կողմնային կողեր* (A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n հատվածները նկ. 100-ում): Պրիզմայի կողմնային կողերը (հաջորդաբար) զուգահեռագծերի հանդիպակաց կողմեր են: Դա հաշվի առնելով՝ դժվար չէ համոզվել, որ *պրիզմայի կողմնային կողերը հավասար են և զույգ առ զույգ զուգահեռ:*


Նկ. 102

Այսպիսով, n-անկյուն պրիզման ունի $2n$ գագաթ և $3n$ կող, ընդ որում՝ կողերից n-ը կողմնային կողեր են, իսկ $2n$-ը՝ հիմքի կողեր (յուրաքանչյուր հիմքում n-ական):

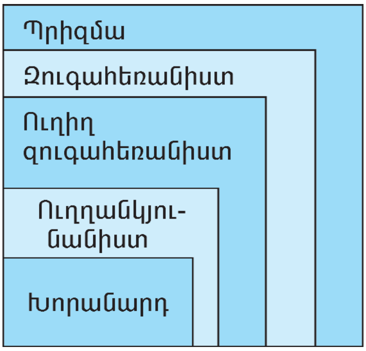
Հատվածը, որը միացնում է պրիզմայի միևնույն նիստին չպատկանող որևէ երկու գագաթներ, կոչվում է *պրիզմայի անկյունագիծ*: Ակնհայտ է, որ եռանկյուն պրիզման անկյունագիծ չունի: Քառանկյուն պրիզման ունի 4 անկյունագիծ, իսկ n-անկյուն պրիզման՝ $n(n$-3) անկյունագիծ:


Նկ. 103

Պրիզման սովորաբար նշանակվում է հիմքերի գագաթների տառերով՝ $A_1A_2…A_nB_1B_2…B_n$: Պրիզմայի օրինակ է զուգահեռանիստը. այն այնպիսի քառանկյուն պրիզմա է, որի հիմքերը զուգահեռագծեր են:

Այն պրիզման, որի կողմնային կողերը ուղղահայաց են հիմքերին, կոչվում է *ուղիղ պրիզմա*: Ուղիղ պրիզմայի օրինակ է ուղղանկյունանիստը: Պարզ է, որ *ուղիղ պրիզմայի կողմնային կողերը հավասար են բարձրությանը* (պարզաբանեք՝ ինչո՞ւ): Նկար 102-ում պատկերված վեցանկյուն պրիզման ուղիղ պրիզմա է, իսկ նկար 103-ում պատկերված եռանկյուն պրիզման՝ թեք պրիզմա, այսինքն՝ նրա կողմնային կողերը հիմքերին ուղղահայաց չեն:

Այն ուղիղ պրիզման, որի հիմքերը կանոնավոր բազմանկյուններ են, կոչվում է *կանոնավոր պրիզմա* (տե՛ս, օրինակ, նկ. 102): Կանոնավոր պրիզմա է, մասնավորապես, խորանարդը, որի հիմքերը կանոնավոր քառանկյուն են:



Նկ. 104

Ամփոփելով՝ փորձենք ըստ ենթատեսակների դասակարգել մեր դիտարկած պրիզմաները: Խորանարդն ուղղանկյունանիստի մասնավոր դեպք է (ենթատեսակ), ուղղանկյունանիստը՝ ուղիղ զուգահեռանիստի, ուղիղ զուգահեռանիստը՝ զուգահեռանիստի, իսկ զուգահեռանիստը՝ պրիզմայի մասնավոր դեպք: Այդ հասկացությունների հարաբերությունները կարելի է ներկայացնել ուղղանկյունաձև շրջանակների միջոցով՝ հետևյալ պատկերի տեսքով (նկ. 104):

Նշենք նաև, որ «պրիզմա» հասկացության՝ ըստ ենթատեսակների դասակարգումը կարելի է կատարել նաև այլ հատկանիշով (տե՛ս խնդիր 200-ը):

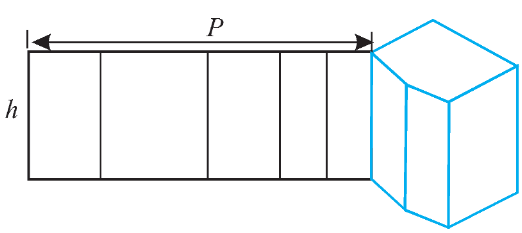
12.3. Պրիզմայի մակերևույթի մակերեսը

Պրիզմայի մակերևույթի մակերեսի հաշվումն ունի գործնական լայն կիրառություններ: Որպես պրիզմայի *կողմնային մակերևույթի* $S_{\text{կ}}$ մակերես կհասկանանք նրա կողմնային նիստերի մակերեսների գումարը, իսկ որպես *լրիվ մակերևույթի մակերես*՝ նրա բոլոր նիստերի մակերեսների գումարը: Ուրեմն՝ եթե պրիզմայի յուրաքանչյուր հիմքի մակերեսը $S_{\text{հ}}$ է, ապա նրա լրիվ մակերևույթի S մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

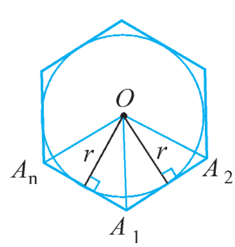
$$S=2S_{\text{հ}}+S_{\text{կ}}: \qquad (1)$$

Ուղիղ պրիզմայի համար կարող ենք ստանալ կողմնային մակերևույթի մակերեսի հաշվման՝ գործածման առումով ավելի հարմար բանաձև: Վարվենք այսպես. դիտարկենք նրա կողմնային մակերևույթի փռվածքը (նկ. 105): Հեշտ է նկատել, որ այդ փռվածքը ուղղանկյուն է, որի մի կողմը հավասար է պրիզմայի h բարձրությանը, իսկ մյուս կողմը՝ պրիզմայի հիմքի P պարագծին: Հետևաբար՝ *ուղիղ պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է պրիզմայի բարձրության և հիմքի պարագծի արտադրյալին*, այսինքն՝

$$S_{\text{կ}}=Ph: \qquad (2)$$



Նկ. 105



Նկ. 106

Առավել դյուրին է կանոնավոր պրիզմայի մակերևույթի մակերեսի հաշվումը, քանի որ նրա հիմքը կանոնավոր բազմանկյուն է, որի մակերեսի հաշվման համար մեզ հայտնի են մի քանի բանաձևեր:

Մասնավորապես, հիմքի մակերեսը կարող ենք հաշվել $S_h = \frac{1}{2} P r$ բանաձևով, որտեղ *P*-ն պարագիծն է, *r*-ը՝ ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը (նկ. 106):

Հետևաբար՝ կանոնավոր պրիզմայի լրիվ մակերևույթի մակերեսի բանաձևը կունենա հետևյալ տեսքը՝ $S = 2 \cdot \frac{1}{2} P r + P h = P r + P h$, այսինքն՝

$$S=P(r+h): \qquad (3)$$

Ստացված (3) բանաձևը գործնականում հարմար է կիրառել, քանի որ բանաձևի աջ մասում գրված մեծությունները՝ *P*-ն, *r*-ը, *h*-ը, տրված կանոնավոր պրիզմայի դեպքում կարող ենք հեշտությամբ չափել պարզ գործիքների, օրինակ՝ չափաժապավենի օգնությամբ:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

187. Ուղղանկյունանիստը տրոհել են երկու բազմանիստերի, որոնցից մեկը ուղղանկյունանիստ է: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ մյուս բազմանիստը ևս ուղղանկյունանիստ է:

188. **ա)** Նվազագույնը քանի՞ գագաթ և քանի՞ նիստ կարող է ունենալ բազմանիստը: **բ)** Բացատրեք, թե ինչո՞ւ բազմանիստը չի կարող ունենալ 4-ից պակաս թվով գագաթներ:

189. Ի՞նչ կարելի է ասել տրված բազմանիստի մասին, եթե հայտնի է, որ նրա ոչ բոլոր երկու կետերը միացնող հատվածներն են ամբողջությամբ ընդգրկված այդ մարմնում:

190. Պատկերեք այնպիսի ուղիղ պրիզմա, որը հնարավոր լինի տրոհել մեկ ուղղանկյունանիստի և մեկ եռանկյուն պրիզմայի:

191. Պատկերեք 5-անկյուն պրիզմա և ցույց տվեք, որ այն կարելի է տրոհել եռանկյուն պրիզմաների:

192. Պատկերեք եռանկյուն պրիզմա և այն լրացրեք մեկ այլ եռանկյուն պրիզմայով այնպես, որ ստացվի զուգահեռանիստ:

193. Գտեք ութանկյուն պրիզմայի կողերի, գագաթների, նիստերի և անկյունագծերի թվերը:

194. Կարո՞ղ է որևէ պրիզմայի կողերի թիվը լինել՝ **ա)** 12, **բ)** 16, **գ)** 21:

195. Կարո՞ղ է որևէ պրիզմայի գագաթների թիվը լինել՝ **ա)** 12, **բ)** 16, **գ)** 21:

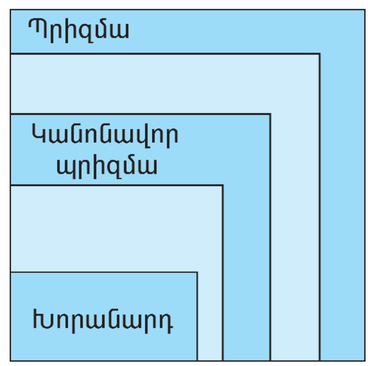
196. Ի՞նչ բազմանկյուն է պրիզմայի հիմքը, եթե այդ պրիզման ունի՝ **ա)** 11 նիստ, **բ)** 14 գագաթ, **գ)** 24 կող, **դ)** 10 անկյունագիծ:

197. Ճշմարի՞տ է արդյոք հետևյալ պնդումը.
ա) կանոնավոր քառանկյուն պրիզման խորանարդն է,
բ) խորանարդը կանոնավոր քառանկյուն պրիզմա է,
գ) եթե պրիզմայի բոլոր նիստերը ուղղանկյուններ են, ապա այն ուղիղ զուգահեռանիստ է,
դ) եթե քառանկյուն պրիզմայի բոլոր կողմնային նիստերը քառակուսիներ են, ապա այն կանոնավոր պրիզմա է:

198. Պրիզմայի բոլոր կողմնային նիստերը ուղղանկյուններ են: Ի՞նչ կարելի է ասել այդ պրիզմայի մասին: Պատասխանը հիմնավորեք:

199. Քանի՞ անկյունագիծ ունի պրիզման, եթե նրա հիմքը՝ **ա)** եռանկյուն է, **բ)** քառանկյուն է, **գ)** հնգանկյուն է, **դ)** n-անկյուն բազմանկյուն է:

200. Նկար 107-ում ուղղանկյունաձև շրջանակներով պատկերված է «պրիզմա» հասկացության դասակարգումն ըստ հաջորդական ենթատեսակների: Լրացրեք չգրառված շրջանակները:



Նկ. 107

201. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմը 1 սմ է, կողմնային կողը՝ a սմ: Պարզեք, թե այդ պրիզման արդյո՞ք խորանարդ է, եթե՝ **ա)** անկյունագիծը $\sqrt{3}$ սմ է, **բ)** անկյունագիծը $\sqrt{a^2+2}$ սմ է, **գ)** անկյունագիծը $a\sqrt{3}$ սմ է, **դ)** $S_կ=4a^2$ սմ^2, **ե)** $S_հ=a^2$ սմ^2, **զ)** $S_լ=6a$ սմ^2, **է)** $S_լ=(2+4a)$ սմ^2:

202. Կանոնավոր n-անկյուն պրիզմայի հիմքի կողմը 4 սմ է, կողմնային կողը՝ 5 սմ: Գտեք n-ը, եթե պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը 120 սմ^2 է:

203. Ի՞նչ մակերեսով ստվարաթուղթ է հարկավոր, որպեսզի հնարավոր լինի պատրաստել 12 սմ բարձրություն ունեցող այնպիսի ուղիղ պրիզմա, որի հիմքը 5 սմ և 12 սմ էջերով ուղղանկյուն եռանկյուն է:

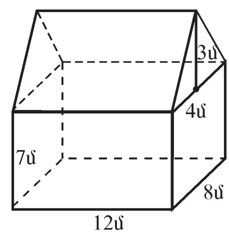
204. Ուղիղ պրիզմայի կողմնային կողը 6 սմ է, իսկ հիմքը շեղանկյուն է, որի անկյունագծերը հավասար են 8 սմ և 6 սմ: Գտեք պրիզմայի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

205. Ուղիղ պրիզմայի կողմնային կողը 4 սմ է, իսկ հիմքը կանոնավոր վեցանկյուն է, որի մեծ անկյունագիծը 14 սմ է: Գտեք պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

206. Ջրավազանի հատակը կանոնավոր վեցանկյուն է, իսկ վեց պատերից յուրաքանչյուրը՝ 2 մ կողմով քառակուսի: Քանի՞ կգ ներկ է հարկավոր ջրավազանի հատակը և պատերը ներկելու համար, եթե հայտնի է, որ յուրաքանչյուր 1 մ^2 մակերեսի վրա օգտագործվում է 0,25 կգ ներկ:

207. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի կողմնային կողը և հիմքի բարձրությունը 12 սմ են: Գտեք պրիզմայի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

208. Ուղիղ պրիզմայի կողմնային կողը 10 սմ է, իսկ հիմքը ուղղանկյուն է, որի անկյունագծերը 6 սմ են և կազմում են 60^0 անկյուն: Գտեք պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:



Նկ. 108

209. Ուղղանկյունանիստ հատակ ունեցող տան դրսի պատերը և եռանկյուն պրիզմայի տեսք ունեցող կտուրի երկու ճակատները (պրիզմայի հիմքերը) շարված են քարից, իսկ կտուրի երկու փեղկերը թիթեղածածկ են: Նկար 108-ում ներկայացված տվյալների միջոցով հաշվեք՝ **ա)** տան պատերի (ներառյալ կտուրի ճակատները) մակերեսը, **բ)** կտուրի թիթեղածածկ մասի մակերեսը:

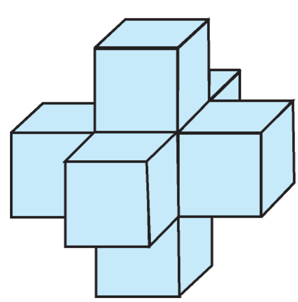
210. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը 25 սմ ու 9 սմ հիմքերով և 8 սմ բարձրությամբ հավասարասրուն սեղան է: Գտեք պրիզմայի կողմնային նիստերով կազմված երկնիստ անկյունները:

211. Խորանարդի երկու հանդիպակաց կողերով անցնող հատույթի մակերեսը $64\sqrt{2}$ սմ² է: Գտեք խորանարդի մակերևույթի մակերեսը:

212. Կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի հիմքի կողմը 8 սմ է, կողմնային կողը՝ 6 սմ: Գտեք պրիզմայի այն հատույթի մակերեսը, որն անցնում է հիմքերից մեկի կողմով և դրան հանդիպակաց՝ մյուս հիմքի գագաթով:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Նկար 109-ում պատկերված է ոչ ուռուցիկ բազմանիստ, որը կազմված է յոթ խորանարդներից: ա) Որոշեք նրա նիստերի և գագաթների թվերը: բ) Պատկերացրեք, որ այդ մարմինը կազմող յոթ խորանարդներից յուրաքանչյուրը զառ է (նիստերի վրա նշված են 1-ից 6 թվերը): Որոշեք, թե նվազագույնը և առավելագույնը ի՞նչ թիվ կարող է լինել զառերի բոլոր չծածկված նիստերի վրա նշված թվերի գումարը:**
2. **Որևէ անվանում ընտրեք նկար 109-ում պատկերված մարմնի համար և փորձեք բառերով այն նկարագրել այնպես, որ այդ նկարագրությունը կարդացողը կարողանա պատկերացնել այդ մարմինը՝ առանց նկարը տեսնելու:**

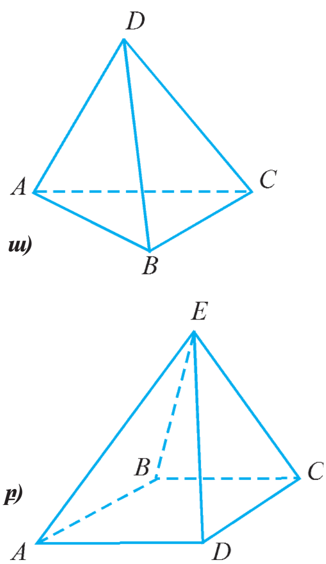

Նկ. 109

§ 13 ԲՈՒՐԳ

13.1. Բուրգի հասկացությունը

Բուրգի մասին դուք նախնական պատկերացումներ ունեք, կարդացել և դիտել եք հաղորդումներ՝ նվիրված Հին աշխարհի յոթ հրաշալիքներից մեկին՝ Եգիպտական բուրգերին*: Բուրգերի հաճախ ենք հանդիպում ճարտարապետական կառույցներում, այդ թվում՝ հայկական ճարտարապետական կոթողներում: Մասնավորապես, եկեղեցիներից շատերի գմբեթներն ունեն բուրգի ձև: Իսկ ինչպիսի՞ կառուցվածք ունի բուրգը՝ որպես երկրաչափական մարմին:

Մենք արդեն ծանոթ ենք քառանիստին. դա այնպիսի բազմանիստ է, որի մակերևույթը կազմված է չորս եռանկյուններից (նկ. 110, ա): Քառանիստը ներկայացնում է եռանկյուն բուրգ: Նկար 110, բ-ում պատկերված է մեկ այլ բազմանիստ, որի մակերևույթը կազմված է մեկ քառանկյունից և չորս այնպիսի եռանկյուններից, որոնք ունեն ընդհանուր գագաթ: Այդ բազմանիստը քառանկյուն բուրգ է: Նշված բազմանիստերին համանման կառուցվածք ունի կամայական բուրգը:

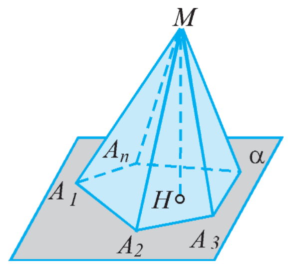


Նկ. 110

Վերցնենք որևէ $A_1A_2\ldots A_n$ բազմանկյուն և մի M կետ, որն ընկած չէ այդ բազմանկյան հարթության մեջ: M կետը հատվածներով միացնենք բազմանկյան բոլոր գագաթներին (նկ. 111): Առաջանում են M ընդհանուր գագաթով n հատ եռանկյուններ՝ A_1MA_2-ը, A_2MA_3-ը, ..., A_nMA_1-ը: Այդ եռանկյունները և վերցված $A_1A_2\ldots A_n$ բազմանկյունը կազմում են մի բազմանիստ, որը կոչվում է *n-անկյուն բուրգ*:

* Եգիպտական բուրգերից ամենամեծը Քեոփսի բուրգն է, որը կառուցվել է մ.թ.ա. XXVIII դարում: Քարե այդ վիթխարի շինությունն ունի 147 մ բարձրություն և ընդհուպ մինչև 19-րդ դարը համարվում էր աշխարհում բոլոր ժամանակների ձեռակերտ կառույցներից ամենաբարձրը, իսկ առ այսօր՝ քարակերտ կառույցներից ամենաբարձրը: Հին Եգիպտոսում փարավոնների (թագավորների) փառքն ու հզորությունը հավերժացնելու համար կառուցել են վեհապանծ դամբարաններ: Եվ պատահական չէ, որ այդ նպատակի համար նախընտրել են բուրգը: Պարզվում է, որ երկրային ձգողության պայմաններում բուրգն ավելի կայուն կառույց է: Դրա շնորհիվ էլ բուրգերից շատերը շուրջ 5 հազար տարի մնացել են կանգուն և այսօր որպես հուշարձան շարունակում են հավերժացնել՝ բայց ոչ միայն փարավոնների փառքը, այլև ճարտարապետների ու քարագործ վարպետների տաղանդը:

Այսպիսով, *բուրգն այն բազմանիստն է, որի նիստերից մեկը որևէ բազմանկյուն է, իսկ մյուս բոլոր նիստերը ընդհանուր գագաթով եռանկյուններ են*: Տվյալ բազմանկյունը կոչվում է *բուրգի հիմք*, ընդհանուր գագաթով եռանկյունները կոչվում են *բուրգի կողմնային նիստեր*, դրանց՝ հիմքին չպատկանող կողմերը՝ *բուրգի կողմնային կողեր*, իսկ ընդհանուր գագաթը՝ *բուրգի գագաթ*: Բուրգի գագաթից նրա հիմքի հարթությանը տարված ուղղահայացը կոչվում է *բուրգի բարձրություն* (*MH* հատվածը նկ. 111-ում):



Բուրգ: Հիմքը՝ $A_1A_2...A_n$ բազմանկյունը, կողմնային նիստերը՝ A_1MA_2..., A_nMA_1 եռանկյունները. գագաթը՝ M կետը, կողմնային կողերը՝ MA_1-ը, ..., MA_n-ը

Նկ. 111

Բուրգը նշանակելու համար սկզբում գրվում է գագաթը, ապա՝ հիմքի բազմանկյունը: Օրինակ՝ նկար 110, ա-ում պատկերված բուրգը նշանակվում է՝ *DABC* (եթե որպես հիմք ենք վերցնում *ABC* եռանկյունը), նկար 110, բ-ում պատկերված բուրգը՝ *EABCD*, իսկ նկար 111-ում պատկերված բուրգը՝ $MA_1A_2\ldots A_n$:

n-անկյուն բուրգն ունի $2n$ կող, որոնցից n-ը հիմքի կողերն են, n-ը՝ կողմնային կողերը: Այդպիսի բուրգն ունի n+1 նիստ, ընդ որում՝ նիստերից մեկը հիմքն է, իսկ n-ը կողմնային նիստերն են: n-անկյուն բուրգը՝ որպես բազմանիստ, ունի n+1 գագաթ, որոնցից մեկը բուրգի գագաթն է, իսկ n-ը հիմքի գագաթներն են:

Բուրգի *մակերևույթի մակերես* կոչվում է նրա բոլոր նիստերի մակերեսների գումարը, իսկ կողմնային նիստերի մակերեսների գումարը կոչվում է *կողմնային մակերևույթի մակերես*: Ուրեմն, եթե բուրգի հիմքի մակերեսը S_{h} է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ $S_{\text{կ}}$, ապա նրա մակերևույթի S մակերեսը (երբեմն անվանում են նաև լրիվ մակերևույթի մակերես) հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S=S_{\text{h}}+S_{\text{կ}}: \qquad (1)$$

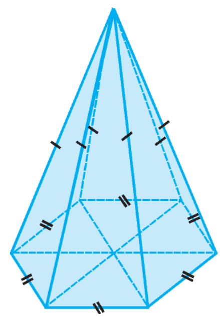
Հաջորդ կետում ցույց կտանք, որ որոշ բուրգերի համար կարող ենք ստանալ (1) բանաձևի՝ գործածման առումով ավելի հարմար տեսք:

13.2. Կանոնավոր բուրգ

Տեխնիկայում և ճարտարապետական շինություններում կառուցվում են մեծամասամբ այնպիսի տեսք ունեցող բուրգեր, որոնց հիմքը կանոնավոր բազմանկյուն է, իսկ գագաթը հավասարահեռ է հիմքի բոլոր գագաթներից:

Այն բուրգը, որի հիմքը կանոնավոր բազմանկյուն է, իսկ բարձրության ծայրակետը հիմքի կենտրոնն է, կոչվում է *կանոնավոր բուրգ* (նկ. 112): Օրինակ՝ Եգիպտական բուրգերը կանոնավոր քառանկյուն բուրգեր են:

Կանոնավոր բուրգ սովորաբար նկարով պատկերում են այսպես: Սկզբում նկարում են կանոնավոր բազմանկյան գծապատկերը և նշում նրա *O* կենտրոնը

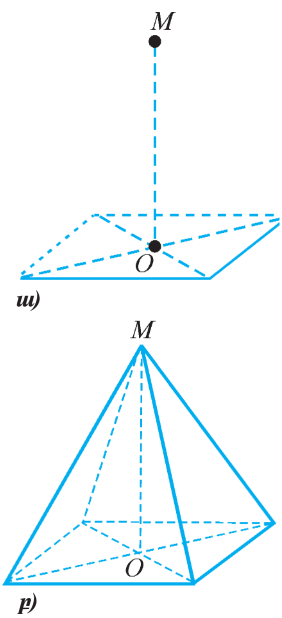


Նկ. 112

(այսինքն՝ նրա ներգծյալ (կամ արտագծյալ) շրջանագծի կենտրոնը): Այնուհետև *O* կենտրոնից տանում ենք բազմանկյան հարթությանն ուղղահայաց *MO* հատվածը (նկ. 113,ա): *M* կետը բուրգի գագաթն է: Մնում է այդ կետը հատվածներով միացնել բազմանկյան գագաթներին, և արդյունքում ստացվում է կանոնավոր բուրգի գծապատկերը (նկ. 113, բ):

Կարևոր է իմանալ կանոնավոր բուրգի հետևյալ երկու հատկությունները:

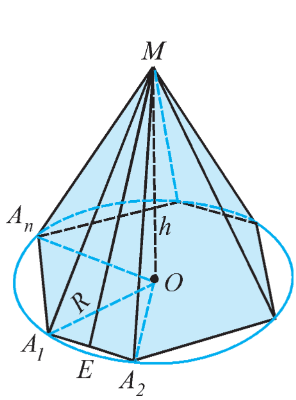
Հատկություն-1. ***Կանոնավոր բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են, ընդ որում՝ դրանք հիմքի հարթության նկատմամբ թեքված են նույն անկյան տակ:***



Նկ. 113

Այս հատկությունը ցույց տալու համար $MA_1A_2\ldots A_n$ կանոնավոր բուրգի կողմնային կողերի $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ծայրակետերը հատվածներով միացնենք հիմքի *O* կենտրոնին և տանենք բուրգի *MO* բարձրությունը (նկ. 114): Դիտարկենք MOA_1, MOA_2, …, MOA_n ուղղանկյուն եռանկյունները: Դրանց յուրաքանչյուրի մի էջը բուրգի *MO* բարձրությունն է, իսկ մյուս էջը՝ հիմքին արտագծած շրջանագծի շառավիղը ($A_1O=A_2O=\ldots=A_nO=$R): Ուրեմն՝ նշված բոլոր ուղղանկյուն եռանկյունները միմյանց հավասար են: Հետևաբար՝ հավասար են նրանց MA_1, MA_2, …, MA_n ներքնաձիգները, ինչպես նաև ներքնաձիգների և *R* երկարությամբ էջերի կազմած անկյունները ($\angle MA_1O=\angle MA_2O=\ldots=\angle MA_nO$): Մնում է նկատել, որ այդ հավասար ներքնաձիգները բուրգի կողմնային կողերն են, իսկ նշված անկյունները՝ կողմնային կողերի թեքման անկյուններն են հիմքի հարթության նկատմամբ:

Հատկություն-2. ***Կանոնավոր բուրգի կողմնային նիստերը հավասարասրուն և միմյանց հավասար եռանկյուններ են:***



Նկ. 114

Կանոնավոր բուրգի կողմնային նիստերի հավասարասրուն եռանկյուն լինելն անմիջապես բխում է հատկություն 1-ից (բոլոր կողմնային կողերը հավասար են): Իսկ, որ այդ նիստերը հավասար եռանկյուններ են, բխում է եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշից: Չէ՞ որ կողմնային նիստերի երրորդ կողմերը բուրգի հիմքի կանոնավոր բազմանկյան կողմերն են և, ուրեմն, միմյանց հավասար են:

Հատկություն 2-ից օգտվելով՝ կարող ենք ստանալ կանոնավոր բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսի հաշվման ավելի հարմար բանաձև: Քանի որ նրա բոլոր կողմնային նիստերը միմյանց հավասար են, ուրեմն կողմնային մակերևույթի մակերեսը հաշվելու համար կարող ենք հաշվել այդ նիստերից մեկի մակերեսը և այնուհետև բազմապատկել կողմնային նիստերի թվով: Կողմնային նիստը հավասարասրուն եռանկյուն է, և հիշենք, որ նրա մակերեսը հավասար է հիմքի ու բարձրության արտադրյալի կեսին:

Կանոնավոր բուրգի կողմնային նիստի՝ գագաթից տարված բարձրությունը կոչվում է բուրգի *հարթագիծ* (օրինակ՝ *ME* հատվածը նկ. 114-ում): Որպես հավասար եռանկյունների բարձրություններ՝ *կանոնավոր բուրգի բոլոր հարթագծերը հավասար են*:

Ուրեմն՝ եթե կանոնավոր բուրգի հարթագիծը d է, իսկ հիմքի կողմը՝ a, ապա կողմնային նիստերից մեկի մակերեսը կլինի $\frac{1}{2}ad$, իսկ բուրգի կողմնային մակերևույթի $S_{\text{կ}}$ մակերեսը՝ $n\cdot\frac{1}{2}ad$: Հաշվի առնելով, որ na մեծությունը կանոնավոր բուրգի հիմքի P պարագիծն է ($P=na$), ստանում ենք՝

$$S_{\text{կ}}=\frac{1}{2}Pd: \qquad (2)$$

Այսպիսով՝ *կանոնավոր բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է հիմքի պարագծի և բուրգի հարթագծի արտադրյալի կեսին*:

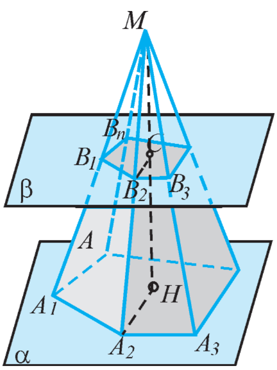
Նշենք նաև, որ կանոնավոր բուրգի հիմքը կանոնավոր բազմանկյուն է, որի $S_{\text{հ}}$ մակերեսը, ինչպես և կանոնավոր պրիզմայի դեպքում, կարելի է հաշվել մեզ հայտնի տարբեր բանաձևերով, մասնավորապես՝ $S_{\text{հ}}=\frac{1}{2}Pr$ բանաձևով (P-ն պարագիծն է, r-ը՝ ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը): Ուրեմն, այս դեպքում բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսի բանաձևը կունենա հետևյալ տեսքը՝ $S=S_{\text{հ}}+S_{\text{կ}}=\frac{1}{2}Pr+\frac{1}{2}Pd$, այսինքն՝

$$S=\frac{1}{2}P\left(r+d\right): \qquad (3)$$

(3) բանաձևը գործնականում կիրառելը հարմար է, քանի որ բանաձևի աջ մասում գրված մեծությունները կարելի է հեշտությամբ չափել պարզ գործիքների միջոցով:

13.3. Հատած բուրգ

Եթե n-անկյուն $MA_1A_2...A_n$ բուրգը հատենք հիմքի α հարթությանը զուգահեռ β հարթությամբ, հատույթում առաջանում է n-անկյուն $B_1B_2...B_n$ բազմանկյուն (նկ. 115): Բուրգն այդ հարթությամբ տրոհվում է երկու բազմանիստերի: Բազմանիստերից մեկը նույնպես բուրգ է՝ M գագաթով և $B_1B_2...B_n$ հիմքով: Մյուս բազմանիստը սկզբնական բուրգի այն մասն է, որը պարփակված է α և β զուգահեռ հարթությունների միջև: Այդ բազմանիստը կոչվում է *հատած բուրգ*: $A_1A_2...A_n$ և $B_1B_2...B_n$ բազմանկյունները կոչվում են հատած բուրգի *հիմքեր* (դրանց հաճախ անվանում են նաև *ստորին* և *վերին հիմքեր*): Հատած բուրգի մյուս նիստերը՝ $A_1B_1B_2A_2$-ը, $A_2B_2B_3A_3$-ը, ..., $A_nB_nB_1A_1$-ը կոչվում են *կողմնային նիստեր*: Դժվար չէ համոզվել, որ *հատած բուրգի կողմնային նիստերը սեղաններ են* (դրանց երկու հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ են, քանի որ α և β զուգահեռ հարթությունները որևէ հարթությամբ հատելիս հատման գծերը զուգահեռ են): A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n հատվածները կոչվում են հատած բուրգի *կողմնային կողեր*: Հիմքերից մեկի որևէ կետից մյուս հիմքի հարթությանը տարված ուղղահայացը կոչվում է հատած բուրգի *բարձրություն* (օրինակ՝ CH հատվածը նկար 115-ում):



Նկ. 115

Այսպիսով, n-անկյուն հատած բուրգն ունի $n+2$ նիստ (2-ը հիմք, n-ը՝ կողմնային նիստեր), $2n$ գագաթ (յուրաքանչյուր հիմքում n գագաթ), $3n$ կող (n կողմնային կողեր և յուրաքանչյուր հիմքում n կող): Հատած բուրգի նույն նիստին չպատկանող երկու որևէ գագաթներ միացնող հատվածը կոչվում է նրա *անկյունագիծ*: Նկատենք, որ n-անկյուն հատած բուրգի անկյունագծերի թիվը որոշվում է այնպես, ինչպես n-անկյուն պրիզմայի դեպքում:

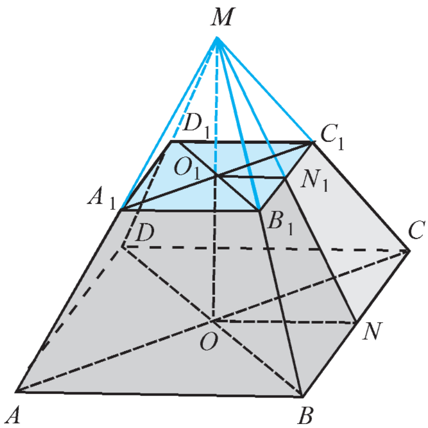
Հատած բուրգի մակերևույթի S մակերեսը հաշվելու համար նրա հիմքերի S_1 և S_2 մակերեսներին պետք է գումարել կողմնային մակերևույթի $S_{կ}$ մակերեսը: Ընդ որում՝ կողմնային մակերևույթի մակերես ասելով՝ հասկանում ենք կողմնային նիստերի (սեղանների) մակերեսների գումարը.

$$S=S_1+S_2+S_{կ}: \qquad (4)$$

Եթե հատած բուրգը *կանոնավոր է*, այսինքն՝ այն ստացվել է կանոնավոր բուրգից (հիմքին զուգահեռ հարթությամբ հատելիս), ապա նրա ինչպես հիմքերի, այնպես էլ կողմնային մակերևույթի մակերեսները կարելի է հաշվել ավելի հարմար բանաձևերով: Դա ցույց տանք կողմնային մակերևույթի մակերեսի համար (հիմքերի մակերեսների հաշվումը նման է կանոնավոր պրիզմայի կամ կանոնավոր բուրգի հիմքերի մակերեսների հաշվմանը):

Հատած բուրգի կողմնային նիստերի (սեղանների) բարձրությունները կոչվում են հատած բուրգի *հարթագծեր* (օրինակ՝ NN_1 հատվածը նկար 116-ում): Կանոնավոր հատած բուրգի բոլոր կողմնային նիստերը հավասար հիմքերով և հավասար բարձրություններով սեղաններ են:

Եթե մի սեղանի հիմքերը նշանակենք a և b, բարձրությունը (հատած բուրգի հարթագիծը)՝ d, ապա նրա մակերեսը հավասար կլինի $\frac{a+b}{2}d$: Քանի որ կանոնավոր n-անկյուն հատած բուրգի կողմնային մակերևույթը կազմված է այդպիսի n սեղաններից, ուրեմն՝ $S_կ = n \cdot \frac{a+b}{2}d = \frac{na+nb}{2}d$: Հաշվի առնելով, որ $na=P_1$, $nb=P_2$, որտեղ P_1-ը և P_2-ը հիմքերի պարագծերն են, ստանում ենք.



Նկ. 115

$$S_կ = \frac{P_1 + P_2}{2}d : \qquad (5)$$

Այսպիսով՝ *կանոնավոր հատած բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է հիմքերի պարագծերի կիսագումարի և հարթագծի արտադրյալին:*

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

213. Քանի՞ գագաթ, քանի՞ նիստ և քանի՞ կող ունի՝ **ա)** հնգանկյուն բուրգը, **բ)** յոթանկյուն բուրգը, **գ)** քառանանկյուն բուրգը:

214. Անվանեք այն բուրգը, որն ունի՝ **ա)** 15 նիստ, **բ)** 11 գագաթ, **գ)** 18 կող:

215. Վեցանկյուն պրիզմայի ներսում վերցված է M կետ, և այն հատվածներով միացված է պրիզմայի բոլոր գագաթներին: Այդ ձևով պրիզման տրոհվել է M գագաթով բուրգերի: Գտեք այդ բուրգերի քանակը: Ինչպիսի՞ բուրգեր են առաջացել և յուրաքանչյուրից քանի՞ հատ:

216. Բուրգի հիմքը ուղղանկյուն եռանկյուն է, իսկ բարձրությունն անցնում է այդ եռանկյան ներքնաձիգի միջնակետով: Ցույց տվեք, որ բուրգի կողմնային կողերը հավասար են:

217. Բուրգի հիմքը 6 սմ ներքնաձիգով ուղղանկյուն եռանկյուն է: Բուրգի կողմնային կողերը հիմքի հարթության հետ կազմում են 60^0 անկյուն: Գտեք բուրգի բարձրությունը:

218. Բուրգի հիմքը 5 սմ կողմով շեղանկյուն է, որի անկյունագծերից մեկը 8 սմ է: Գտեք բուրգի կողմնային կողերը, եթե նրա բարձրությունը 7 սմ է և անցնում է հիմքի անկյունագծերի հատման կետով:

219. Եռանկյուն բուրգի յուրաքանչյուր նիստը 18 սմ պարագծով հավասարակողմ եռանկյուն է: Գտեք բուրգի մակերևույթի մակերեսը:

220. Եկեղեցու գմբեթն ունի կանոնավոր 12-անկյուն բուրգի տեսք, որի հարթագիծը 6 մ է, իսկ հիմքի պարագիծը՝ 16,8 մ: Գտեք գմբեթի յուրաքանչյուր նիստի մակերեսը:

221. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 12 սմ է, կողմնային կողը՝ 10 սմ: Գտեք բուրգի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

222. Բուրգի հիմքը կանոնավոր վեցանկյուն է, և նրա կողմնային կողերը հավասար են: Արդյո՞ք այդ բուրգը կանոնավոր է: Պատասխանը հիմնավորեք:

223. Ճշմարի՞տ է արդյոք հետևյալ պնդումը.

ա) բուրգի գագաթների և նիստերի թվերի գումարը 2-ով մեծ է կողերի թվից,

բ) կանոնավոր բուրգի հարթագիծը կարող է հավասար լինել բուրգի բարձրությանը,

գ) կամայական բուրգ կարելի է տրոհել նույն գագաթն ունեցող ցանկացած թվով եռանկյուն բուրգերի,

դ) կանոնավոր բուրգի բարձրության կամայական կետը հավասարահեռ է հիմքի գագաթներից,

ե*) եթե բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են, ապա նրա հիմքին կարելի է արտագծել շրջանագիծ:

224. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 5 սմ է, իսկ գագաթին հարակից հարթ անկյունը՝ 60^0: Գտեք բուրգի կողմնային կողը և հարթագիծը:

225. Հաշվեք Քեոփսի բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ իմանալով, որ այն 147 մ բարձրությամբ կանոնավոր բուրգ է, որի հիմքը 230 մ կողմով քառակուսի է:

226. Տաղավարի կտուրն ունի կանոնավոր ութանկյուն բուրգի տեսք, որի հիմքի կողմը 1 մ է, կողմնային կողը՝ 1,6 մ: Որքա՞ն մակերեսով թիթեղ է հարկավոր այդ կտուրը ծածկելու համար, եթե հայտնի է, որ պահանջվող թիթեղը լինելու է կտուրի մակերեսից 10%-ով ավելի:

227. Գծագրեք քառանկյուն բուրգ և նրա վրա պատկերեք բուրգի այնպիսի հատույթ, որը լինի՝ **ա)** եռանկյուն, **բ)** քառանկյուն:

228. Ուղղանկյունանիստը և կանոնավոր քառանկյուն բուրգը դասավորված են այնպես, որ ուղղանկյունանիստի մի հիմքի գագաթները գտնվում են բուրգի կողմնային կողերի վրա, իսկ մյուս հիմքի գագաթները՝ բուրգի հիմքի հարթության մեջ: Գծագրով պատկերեք այդպիսի դասավորությամբ ուղղանկյունանիստ և բուրգ:

229. Հատած բուրգն ունի 24 կող: Քանի՞ կող ունի այն բուրգը, որի հատումից առաջացել է այդ հատած բուրգը:

230. Կանոնավոր եռանկյուն հատած բուրգի կողմնային նիստերը 6 սմ ու 4 սմ հիմքերով և 7 սմ բարձրությունով սեղաններ են: Գտեք նրա կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

231. Գտեք կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները, եթե նրա հարթագիծը 2 սմ է, իսկ հիմքերի կողմերը հավասար են 4 սմ և 1 սմ:

232. Սրճարանի բարձրությունը 3 մ է, իսկ հատակն ու առաստաղը 15 մ և 9 մ կողմերով հավասարակողմ եռանկյուններ են: Երկու պատերը քարից են և ուղղահայաց են հատակի հարթությանը, իսկ երրորդ՝ թեք պատը ապակյա է: Հաշվեք և համեմատեք քարե պատերի ամբողջ մակերեսն ու ապակյա պատի մակերեսը:

233. Կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի հիմքի կողմը 10 սմ է, կողմնային կողը՝ 15 սմ: Բուրգի բարձրության միջնակետով տարված է հիմքի հարթությանը զուգահեռ հատույթ: Գտեք՝ **ա)** բուրգի բարձրությունը, **բ)** բուրգի հարթագիծը, **գ)** հատույթի մակերեսը, **դ)** առաջացած հատած բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

234*. Կանոնավոր բուրգը, որի կողմնային մակերևույթի մակերեսը 144 սմ^2 է, հատել են բարձրությանն ուղղահայաց և նրա միջնակետով անցնող հարթությամբ: Գտեք ստացված հատած բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

235. Տրված են այնպիսի բուրգ և պրիզմա, որոնք ունեն հավասար թվով գագաթներ: Կարո՞ղ են հավասար լինել նաև դրանց՝ **ա)** նիստերի թվերը, **բ)** կողերի թվերը:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

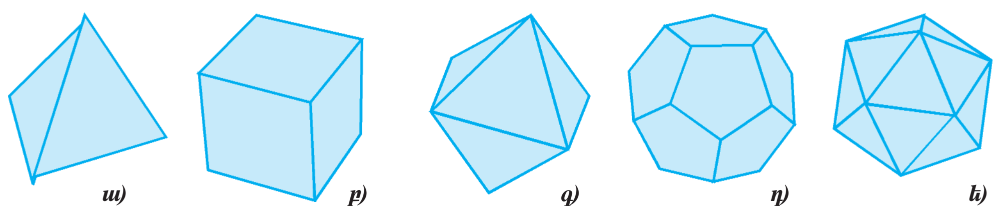
1. **Տրված են պրիզմայի և բուրգի տարբեր մոդելներ, և դուք ունեք միայն չափաժապավեն: Պահանջվում է որոշել, թե դրանք արդյո՞ք կանոնավոր են: Յուրաքանչյուրի համար նկարագրեք, թե ինչպես կլուծեք այդ խնդիրը: Նկատի ունեցեք, որ ձեր ներկայացրած պատասխանները պետք է նաև հիմնավորել:**
2 **Հին եգիպտական հանրահայտ ասույթներից մեկը հաճախ արտասանվում է նաև այսօր. «*Բոլոր մարդիկ վախենում են ժամանակից, իսկ ժամանակը վախենում է բուրգերից*»: Ձեր կարծիքով, ո՞րն է այդ ասույթով արտահայտված հիմնական գաղափարը:**

§ 14 ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

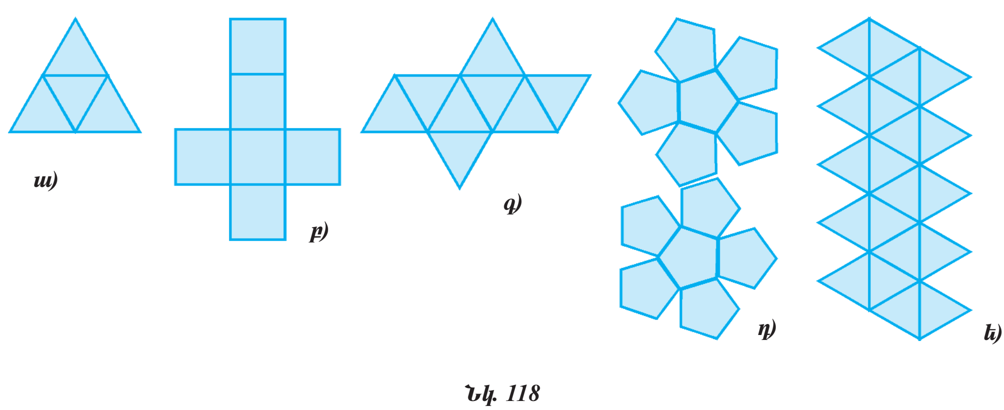
14.1. Պլատոնական մարմիններ

Դեռևս հնադարյան ժամանակներից մարդիկ երկրաչափական առանձին պատկերներին վերագրել են խորհրդանշական իմաստ և տվել մոգական նշանակություն: Զարմանահրաշ են համարվել հատկապես նկար 117-ում ներկայացված բազմանիստերը, որոնք տարբեր մեկնությունների առարկա են դարձել գիտնականների ու հոգևորականների համար, արտացոլվել քանդակագործների, նկարիչների, ոսկերիչների աշխատանքներում: Այդ բազմանիստերն օժտված են որոշակի հատկանիշներով. ա) դրանցից յուրաքանչյուրն ուռուցիկ բազմանիստ է, բ) յուրաքանչյուրի բոլոր նիստերը միմյանց հավասար կանոնավոր բազմանկյուններ են, գ) յուրաքանչյուրի ամեն մի գագաթում միանում են հավասար թվով կողեր: Այս հատկանիշներով օժտված բազմանիստերը կոչվում են *կանոնական բազմանիստեր:*

Կանոնական բազմանիստերն անվանվում են իրենց նիստերի քանակով՝ քառանիստ, վեցանիստ (խորանարդ), ութանիստ, տասներկանիստ, քսանանիստ: Կանոնական քառանիստի (ա), ութանիստի (գ) և քսանանիստի (ե) մակերևույթները կազմված են կանոնավոր եռանկյուններից, վեցանիստի (բ) մակերևույթը՝



Նկ. 117



Նկ. 118

կանոնավոր քառանկյուններից (քառակուսիներից), իսկ տասներկանիստի (դ) մակերևույթը՝ կանոնավոր հնգանկյուններից (նկար 118-ում պատկերված են դրանց մակերևույթների փռվածքները):

Թվարկված այդ հինգ կանոնական բազմանիստերը ժամանակին հանգամանորեն ուսումնասիրել է Հին հունական մեծ փիլիսոփա Պլատոնը, և դրա համար էլ դրանց անվանում են նաև *պլատոնական մարմիններ*: Նա նկարագրել է յուրաքանչյուր բազմանիստի կառուցվածքը և մեկնաբանել դրանց պատկերանշային իմաստները*: Ստորև աղյուսակով ներկայացվում են այդ բազմանիստերի քանակական բնութագրերը:

Կանոնական բազմանիստը	Մի նիստի կողերի թիվը	Մի գագաթից ելնող կողերի թիվը	Նիստերի թիվը	Գագաթների թիվը	Կողերի թիվը
Քառանիստ	3	3	4	4	6
Խորանարդ	4	3	6	8	12
Ութանիստ	3	4	8	6	12
Տասներկանիստ	5	3	12	20	30
Քսանանիստ	3	5	20	12	30

Դիտելով աղյուսակը՝ նկատում ենք, որ նրանում կան կրկնվող թվեր: Խորանարդն ունի այնքան նիստ, որքան գագաթ ունի ութանիստը, և այնքան գագաթ, որքան նիստ ունի ութանիստը, իսկ դրանց կողերի թվերը հավասար են: Նույնպիսի առնչություն կա նաև տասներկանիստի ու քսանանիստի նիստերի, գագաթների և կողերի միջև: Ուրեմն, եթե այդ բազմանիստերի բոլոր նիստերի կենտրոնները միացնենք, ապա դարձյալ կստացվեն կանոնական բազմանիստեր. խորանարդից կստացվի ութանիստ, ութանիստից՝ խորանարդ, նմանապես՝ տասներկանիստից կստացվի քսանանիստ, քսանանիստից՝ տասներկանիստ: Այդ ձևով քառանիստից կստացվի դարձյալ քառանիստ, քանի որ նրա նիստերի ու գագաթների թվերը հավասար են: Բացի այդ, խորանարդի վեց նիստերի անկյունագծերով կարելի է ստանալ քառանիստ, իսկ քսանանիստի 20 գագաթներից կարելի է ընտրել այնպիսի ությակ, որոնք լինեն խորանարդի գագաթներ: Պլատոնական հինգ մարմինների միջև կան նաև բազմաթիվ այլ կապեր: Այդպիսի ուշագրավ կապերի բացահայտման արդյունքում Պլատոնն այդ մարմինների մասին գրել է.

* Պլատոնի ժամանակներում (մ.թ.ա. IV-V դարեր) մարդիկ համոզմունք ունեին, որ երկրային բնության հիմնական տարրերն են *կրակը, հողը, ջուրը* և *օդը*: Ըստ Պլատոնի՝ կանոնական հինգ բազմանիստերն արտահայտում են աշխարհի կառույցի հիմքերը: Ընդ որում՝ կանոնական քառանիստը կրակի պատկերանշանն է, վեցանիստը՝ հողի, ութանիստը՝ օդի, քսանանիստը՝ ջրի, իսկ տասներկանիստով պատկերանշվում է տիեզերքը (երկնայինը):

«Դրանք մեկը մյուսին նման չեն, սակայն կարող են, քանդվելով, վերածնվել մեկը մյուսից»:

Պլատոնական մարմինները, ինչպես անցյալում, այնպես էլ ներկայումս, դիտվում են որպես երկրաչափության խորքային ճանաչողության և նրբագեղության խորհրդանիշներ, գեղեցկության և կատարելության տիպարներ:

Ծանոթություն

Ուշադրության է արժանի մի հետաքրքիր հարց. *կանոնական բազմանիստերը միայն պլատոնական այդ հի՞նգ մարմիններն են, թե՞ կան այլ բազմանիստեր ևս:* Պարզվում է, բացի նշված հինգից, ուրիշ կանոնական բազմանիստ չկա: Դա հիմնավորվում է հետևյալ կերպ:

Բազմանիստի յուրաքանչյուր գագաթը մի քանի կանոնավոր բազմանկյան (նիստի) գագաթ է: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր գագաթում միանում են երեքից ոչ պակաս թվով նիստեր: Նիստերի՝ տվյալ գագաթին հարակից անկյունների գումարը փոքր է 360^0-ից: Իսկապես, եթե այդ անկյունների գումարը լիներ 360^0, ապա այդ գագաթով նիստերը կգտնվեին մի հարթության մեջ, իսկ եթե գումարը լիներ 360^0-ից մեծ, ապա բազմանիստն ուռուցիկ չէր լինի (տե՛ս, օրինակ, նկ. 118-ում պատկերված բազմանիստերի փռվածքները, որոնց յուրաքանչյուր գագաթին հարակից անկյունները 360^0 չեն լրացնում): Ուրեմն՝ կանոնական բազմանիստի գագաթում հնարավոր է, որ միանան՝ ա) երեք, չորս, կամ հինգ հավասարակողմ եռանկյուններ, բ) երեք քառակուսիներ, գ) երեք կանոնավոր հնգանկյուններ: Բայց, օրինակ, 6 կամ ավելի թվով հավասարակողմ եռանկյուններ միանալ չեն կարող, քանի որ $n \geq 6$ դեպքում կստացվի $n \cdot 60^0 \geq 360^0$, ինչը անհնար է: Բացառվում է նաև, որ կանոնավոր վեցանկյունը, յոթանկյունը և այլն լինեն որևէ կանոնական բազմանիստի նիստեր (օրինակ՝ վեցանկյան դեպքում մի անկյունը 120^0 է, և որևէ գագաթի հարակից երեք նիստերի անկյունների գումարը կհավասարվի 360^0-ի):

Այսպիսով, կանոնական բազմանիստ ստանալու համար հնարավոր է ընդամենը հինգ դեպք: Վերոհիշյալ ա) դեպքում երեքն են՝ քառանիստը, ութանիստը, քսանանիստը, իսկ բ) և գ) դեպքերում՝ մեկական՝ խորանարդը և տասներկանիստը:

Երկրաչափության մեջ դիտարկվում են նաև, այսպես կոչված, *կիսականոնական բազմանիստեր*, որոնց սահմանման մեջ հատկանիշների համար ներկայացվում է համեմատաբար «մեղմ» պահանջ: Դրանց նիստերը կարող են լինել նաև ոչ միատեսակ կանոնավոր բազմանկյուններ (նման մի օրինակ պատկերված է նկ. 130-ում): Այդպիսի բազմանիստերի ուսումնասիրության հարցում մեծ ավանդ ունի Հին հունական մեծ մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս Արքիմեդը (մ.թ.ա. 287-212 թթ.):

14.2. Կենտրոնային, առանցքային և հայելային համաչափություններ

Պատկերի համաչափության հասկացությունը մեզ ծանոթ է միջին դպրոցի դասընթացից: Մասնավորապես, հարթ պատկերների համար դիտարկել ենք կենտրոնային և առանցքային համաչափությունները: Դրանց նմանությամբ էլ սահմանվում են տարածական պատկերների համաչափությունները:

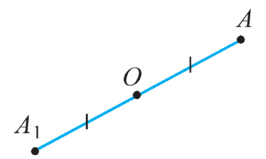
Համաչափությունը պատկերի հատկություն է, իսկ դրա հիմքում ընկած է երկու կետերի համաչափության հասկացությունը: Այդ առումով էլ՝ պատկերի համաչափության հարց քննարկելիս նախ կներկայացնենք, թե ի՞նչ է երկու կետերի համաչափությունը:

Տարածության մեջ գտնվող պատկերների համար դիտարկվում են ինչպես կետի և ուղղի նկատմամբ համաչափություններ, այնպես էլ համաչափություն հարթության նկատմամբ: Անդրադառնանք դրանցից յուրաքանչյուրին:

Ա. Կենտրոնային համաչափություն

Տարածության A և A_1 կետերը կոչվում են *O կետի նկատմամբ համաչափ*, եթե O կետը AA_1 հատվածի միջնակետն է (նկ. 119): Այդ դեպքում կասենք, որ A և A_1 կետերը *կենտրոնային համաչափ* կետեր են, և O կետը *համաչափության կենտրոնն* է: O կետի համար ընդունվում է, որ ինքն իր նկատմամբ համաչափ է:

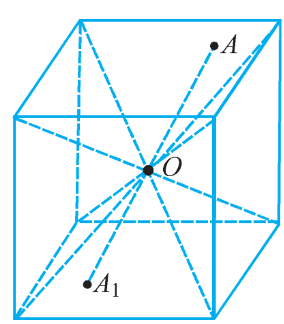
Պատկերի կենտրոնային համաչափությունը պարզաբանելու համար որպես օրինակ դիտարկենք զուգահեռանիստը (նկ. 120): Դիցուք՝ O-ն նրա անկյունագծերի հատման կետն է: Դժվար չէ նկատել, որ եթե վերցնենք զուգահեռանիստին պատկանող որևէ A կետ, ապա O կետի նկատմամբ նրա համաչափ A_1 կետը նույնպես պատկանում է զուգահեռանիստին: Դրանից ելնելով՝ կասենք, որ զուգահեռանիստն օժտված է կենտրոնային համաչափությամբ, և նրա անկյունագծերի հատման կետը համաչափության կենտրոնն է:



Նկ. 119

Այս օրինակի նմանությամբ է սահմանվում պատկերի կենտրոնային համաչափությունը:

Պատկերը կոչվում է O կետի նկատմամբ համաչափ, եթե նրա բոլոր կետերի՝ O կետի նկատմամբ համաչափ կետերը նույնպես այդ պատկերի կետեր են: Այդ դեպքում պատկերի համար ասում են, որ *այն օժտված է կենտրոնային համաչափությամբ*: O կետը կոչվում է պատկերի *համաչափության կենտրոն*:



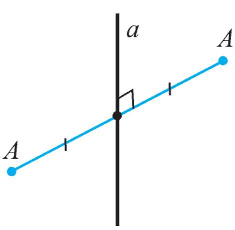
Նկ. 120

Կենտրոնային համաչափությամբ օժտված պատկերի օրինակ են խորանարդը, կանոնական ութանիստը, կանոնավոր վեցանկյուն պրիզման և այլն: Ուղիղը և հարթությունը նույնպես կենտրոնային համաչափ պատկերներ են, ընդ որում՝ դրանց յուրաքանչյուր կետը համաչափության կենտրոն է: Այսինքն՝ ուղղի և հարթության համաչափության կենտրոններն անվերջ շատ են:

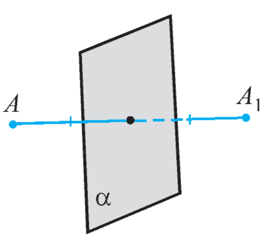
Նշենք նաև, որ ոչ բոլոր պատկերներն են օժտված կենտրոնային համաչափությամբ: Ճառագայթը, կիսահարթությունը, երկնիստ անկյունը, եռանկյուն պրիզման, կամայական բուրգը և բազմաթիվ այլ պատկերներ համաչափության կենտրոն չունեն և, ուրեմն, կենտրոնային համաչափ պատկեր չեն:

Բ. Առանցքային և հայելային համաչափություններ

Տարածության A և A_1 կետերը կոչվում են *a ուղղի նկատմամբ համաչափ*, եթե a ուղիղն ուղղահայաց է AA_1 հատվածին և անցնում է նրա միջնակետով (նկ. 121): Այդ դեպքում կասենք, որ A և A_1 կետերն *առանցքային համաչափ* կետեր են, և a ուղիղը *համաչափության առանցքն* է: Ընդունվում է, որ a ուղղի յուրաքանչյուր կետը համաչափ է ինքն իրեն:



Նկ. 121

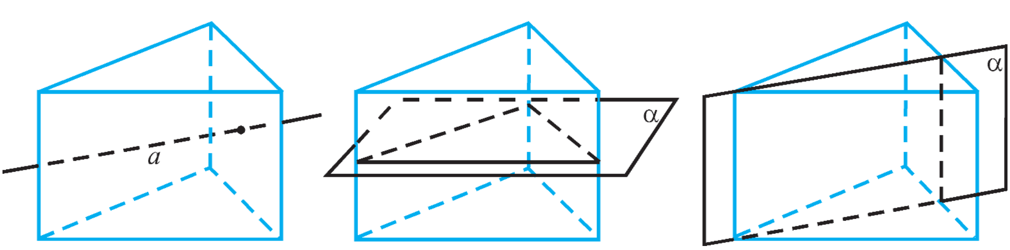


Նկ. 122

Համանման ձևով է սահմանվում նաև համաչափությունը հարթության նկատմամբ: Տարածության A և A_1 կետերը կոչվում են *α հարթության նկատմամբ համաչափ*, եթե α հարթությունն ուղղահայաց է AA_1 հատվածին և անցնում է նրա միջնակետով (նկ. 122): Այդ դեպքում կասենք, որ A և A_1 կետերը *հայելային համաչափ կետեր* են, և α-ն *համաչափության հարթությունն* է: Ընդունվում է, որ α հարթության յուրաքանչյուր կետը համաչափ է ինքն իրեն:

Այժմ կարող ենք սահմանել պատկերի առանցքային և հայելային համաչափությունները:

Պատկերը կոչվում է a ուղղի (α հարթության) նկատմամբ համաչափ, եթե նրա բոլոր կետերի՝ a ուղղի (α հարթության) նկատմամբ համաչափ կետերը նույնպես այդ պատկերի կետեր են: Այդ դեպքում պատկերի համար ասում են, որ այն օժտված է *առանցքային (հայելային) համաչափությամբ*: a ուղիղը

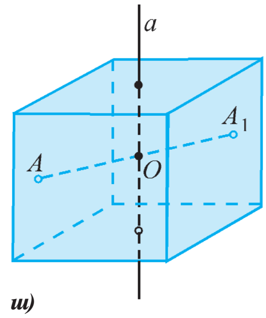


ա) բ) գ)

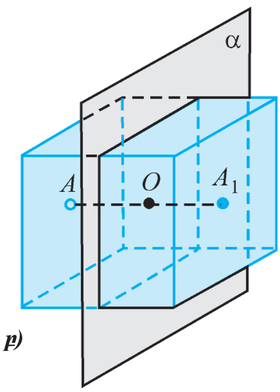
Նկ. 123

(α հարթությունը) կոչվում է *համաչափության առանցք (համաչափության հարթություն)*:

Պատկերը կարող է ունենալ մեկ կամ մի քանի համաչափության առանցք և համաչափության հարթություն: Օրինակ՝ ուղիղ եռանկյուն պրիզման, որի հիմքը հավասարասրուն (բայց ոչ հավասարակողմ) եռանկյուն է, ունի մեկ համաչափության առանցք (նկ. 123, ա) և երկու համաչափության հարթություն (նկ. 123 բ, գ): Ուղղանկյունանիստն ունի երեք համաչափության առանցք և երեք համաչափության հարթություն (նկար 124 ա, բ-ում ցույց են տրված մեկական առանցք և հարթություն, դուք կարող եք տանել նաև մյուսները): Կան այնպիսի պատկերներ, որոնք ունեն համաչափության անվերջ շատ առանցքներ և հարթություններ: Այդպիսի պատկերների օրինակ են ուղիղը և հարթությունը, որոնց յուրաքանչյուրին ուղղահայաց ցանկացած ուղիղը (հարթությունը) համաչափության առանցք (հարթություն) է: Գոյություն ունեն նաև այնպիսի պատկերներ, որոնք չունեն ո՛չ համաչափության առանցք, ո՛չ էլ համաչափության հարթություն: Այդպիսի պատկերի օրինակ է այն բուրգը, որի հիմքը տարակողմ եռանկյուն է:



ա)



բ)

Նկ. 124

14.3. Համաչափությունները բնության մեջ, արվեստում, տեխնիկայում

Մեր շրջակա աշխարհի առարկաներից շատերն օժտված են կենտրոնային, առանցքային կամ հայելային համաչափությամբ: Կենդանի բնության համար, կարելի է ասել, համաչափությունը համընդհանուր հատկություն է: Թռչունների, ջրային և ցամաքային կենդանիների մարմիններն ունեն այնպիսի տեսք, որ մարմնի մի կեսը, ասես, մյուս կեսի հայելային պատկերն է (նկ. 125, ա, բ): Նույնը վերաբերում է մարդուն. օրինակ՝ նրա դեմքը կարելի է համարել որպես հայելային համաչափ պատկեր: Կենտրոնային, առանցքային և հայելային համաչափությունների ենք հանդիպում նաև բույսերի մոտ: Օրինակ՝ ծառերի տերևներից և ծաղիկների պսակաթերթերից շատերը համաչափ են միջին ջղի նկատմամբ (նկ. 126), ծառի բնի լայնական կտրվածքը հիմնականում համաչափ է լինում կենտրոնի նկատմամբ, իսկ որոշ բույսեր համաչափ են ցողունի միջով անցնող հարթության նկատմամբ: Համաչափությամբ են օժտված նաև մրգատու ծառերի և բանջարանոցային բույսերի պտուղներից ու հատապտուղներից շատերը (խնձոր, տանձ, ծիրան, դեղձ, սալոր, վարունգ, լոլիկ և այլն):

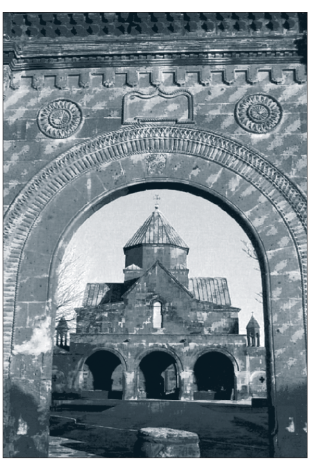
ա) բ)

Նկ. 125

Նկ. 126

Համաչափությունների ամենուր հանդիպում ենք ոչ միայն բնության մեջ, այլև մարդու կողմից ստեղծագործված առարկայական աշխարհում: Ըստ համաչափությունների արարելը մարդու համար դարեր շարունակ դիտվել է որպես ոչ միայն հարմարավետության, այլև գեղեցկության ու կատարելության հասնելու միջոց: Դրա վառ վկայությունը գեղանկարչության, քանդակագործության, ճարտարապետության մեջ և արվեստի այլ բնագավառներում ստեղծված գործերում համաչափ պատկերների օգտագործումն է, որի շնորհիվ դրանք ընկալվում են որպես գեղեցիկի մարմնավորում:

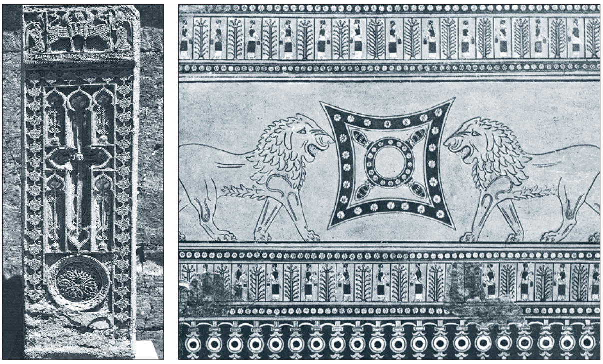
Համաչափությունների կիրառման հիանալի օրինակների ենք հանդիպում, մասնավորապես, հայկական դարավոր մշակույթում: Դրանք դրսևորվում են միջնադարյան և ժամանակակից ճարտարապետական կառույցներում (նկ. 127 ա, բ), խաչքարերի, որմնանկարների ու գորգերի մեջ (նկ. 128 ա, բ) և այլն: Ուշադիր դիտելու դեպքում կնկատենք, որ այդ գործերի ու նրանց առանձին տարրերի մեջ հմտորեն զուգակցվել են տարբեր համաչափություններ՝ կենտրոնային, առանցքային և հայելային:



ա)

բ)

Նկ. 127



ա) *բ)*

Նկ. 128

Նկ. 129

Համաչափությունները լայն տարածում ունեն նաև տեխնիկայում: Մեքենաները, նավերը, ինքնաթիռները (նկ. 129), ինչպես նաև դրանցում օգտագործված սարքերն ու մանրակները, որպես կանոն, պատրաստվում են ըստ կենտրոնային, առանցքային կամ հայելային համաչափության:

Կյանքի տարբեր բնագավառներում, կենցաղում, ուսումնական և աշխատանքային առօրյայում գործածվող առարկաներն ու սարքերը պատրաստվում են այնպես, որ նրանցում զուգակցվեն օգտակարն ու գեղագիտականը: Եվ դա մեծամասամբ իրականացվում է տարբեր համաչափությունների կիրառման միջոցով:

Հարցեր, խնդիրներ, առաջադրանքներ

236. Ճշմարի՞տ է արդյոք հետևյալ պնդումը.

ա) կանոնավոր եռանկյուն բուրգը կանոնական քառանիստ է,

բ) կանոնական քառանիստը կանոնավոր եռանկյուն բուրգ է,

գ) ուղղանկյունանիստը, որի բոլոր կողերը հավասար են, կանոնական վեցանիստ է,

դ) եթե եռանկյուն բուրգի բոլոր կողմնային նիստերը հավասարակողմ եռանկյուններ են, ապա այն կանոնական քառանիստ է,

ե) եթե քառանկյուն պրիզմայի բոլոր կողմնային նիստերը կանոնավոր քառանկյուններ են, ապա այն կանոնական վեցանիստ է:

237. Հաշվեք կանոնական վեցանիստի և կանոնական տասներկանիստի նիստերի անկյունագծերի թվերը:

238. Իմանալով տրված կանոնական բազմանիստի նիստերի թիվը և մի նիստի գագաթների թիվը՝ ինչպե՞ս հաշվել նրա բոլոր գագաթների թիվը և բոլոր կողերի թիվը:

Լուծում. Հաշվենք, օրինակ, կանոնական տասներկանիստի գագաթների և կողերի թվերը:

Նախ հաշվենք գագաթների թիվը:

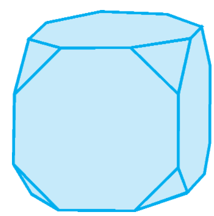
Տասներկանիստն ունի 12 նիստ, յուրաքանչյուր նիստը՝ 5 գագաթ: Ամեն մի գագաթում միանում են 3 նիստ, այսինքն՝ նույն գագաթը ներառվում է երեք նիստերի գագաթների թվերի մեջ:

Ուրեմն՝ տասներկանիստի բոլոր գագաթների թիվը հաշվվում է $\frac{12\cdot 5}{3}$ արտահայտությամբ, այսինքն՝ այն ունի 20 գագաթ:

Այժմ հաշվենք կողերի թիվը:

Տասներկանիստն ունի 12 նիստ, յուրաքանչյուր նիստը՝ 5 կող: Ամեն մի կողն ընդհանուր է երկու նիստի համար: Ուրեմն՝ տասներկանիստի բոլոր կողերի թիվը հաշվվում է $\frac{12\cdot 5}{2}$ արտահայտությամբ, այսինքն՝ այն ունի 30 կող:

Մյուս կանոնական բազմանիստերի գագաթների և կողերի թվերը կարող ենք հաշվել նույն եղանակով (այդ թվերը հաշվեք ինքնուրույն):



Նկ. 130

239. Խորանարդի բոլոր գագաթներից հատել են քառանիստեր՝ ինչպես պատկերված է նկար 130-ում: Գտեք ստացված բազմանիստի գագաթների, նիստերի և կողերի թվերը:

240. Խորանարդի բոլոր գագաթներից հատել են քառանիստեր այնպես, որ ստացված բազմանիստի բոլոր նիստերը կանոնավոր բազմանկյուններ են, ընդ որում՝ յուրաքանչյուր գագաթում միանում են հավասար թվով (3-ական) կողեր (տե՛ս նկ. 130-ը): Արդյո՞ք այդ բազմանիստը կանոնական է: Պատասխանը հիմնավորեք:

241. Կանոնական քառանիստի մակերևույթի փռվածքը 12 սմ կողմով հավասարակողմ եռանկյուն է: Գտեք՝ **ա)** քառանիստի նիստի բարձրությունը, **բ*)** քառանիստի բարձրությունը:

242. Գտեք այն անկյունը, որ կազմում են կանոնական քառանիստի՝ **ա)** կողը և նրան չընդգրկող նիստի հարթությունը, **բ)** երկու նիստերն ընդգրկող հարթությունները, **գ*)** երկու հանդիպակաց կողերն ընդգրկող ուղիղները:

243. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի անկյունագծերը հատվում են O կետում: Որոշեք հետևյալ պատկերի կենտրոնային համաչափ պատկերը O կետի նկատմամբ. **ա)** A գագաթի, **բ)** BB_1 կողի, **գ)** ABB_1A_1 նիստի, **դ)** DO հատվածի, **ե)** ACC_1A_1 հատույթի:

244. a ուղիղն անցնում է $SABCDEF$ կանոնավոր վեցանկյուն բուրգի S գագաթով և հիմքի կենտրոնով: Որոշեք հետևյալ պատկերի առանցքային համաչափ պատկերը a ուղղի նկատմամբ. **ա)** A գագաթի, **բ)** BC կողի, **գ)** SF կողի, **դ)** SAB նիստի, **ե)** AC հատվածի, **զ)** SAD հատույթի:

245. α հարթությունն անցնում է $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ կանոնավոր հնգանկյուն պրիզմայի բարձրության միջնակետով և ուղղահայաց է նրան: Որոշեք հետևյալ պատկերի հայելային համաչափ պատկերը α հարթության նկատմամբ. **ա)** A գագաթի, **բ)** BC կողի, **գ)** AC հատվածի, **դ)** AB_1 հատվածի, **ե)** AA_1D_1D հատույթի:

246. Կանոնական քառանիստի համաչափության առանցքները նրա հանդիպակաց կողերի միջնակետերով անցնող ուղիղներն են: Քանի՞ համաչափության առանցք ունի կանոնական քառանիստը:

247. Խորանարդի մի նիստի չպատկանող երկու զուգահեռ կողերի միջնակետերով անցնող ուղիղը համաչափության առանցք է: Գտեք այդ ուղղի՝ խորանարդի մեջ ընկած հատվածի երկարությունը, եթե խորանարդի կողը 6 սմ է:

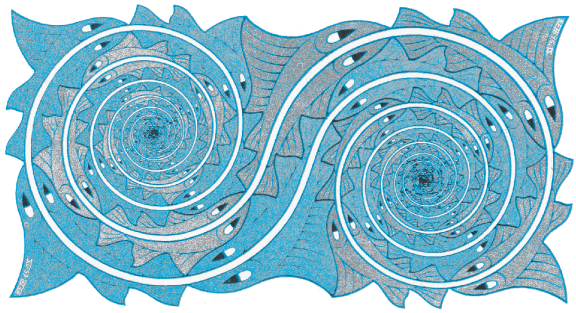
248. Քանի՞ համաչափության հարթություն ունի կանոնական քառանիստը:

249. Կանոնական քառանիստի կողը 4 սմ է: Գտեք քառանիստի համաչափության հարթությունով առաջացած հատույթի մակերեսը:

250. Կանոնական ութանիստի կողը 16 սմ է: Գտեք նրա հանդիպակաց գագաթների հեռավորությունը:

Խմբային աշխատանքի առաջադրանք

1. **Աղյուսակով ներկայացրեք ձեր ուսումնասիրած ուռուցիկ բազմանիստերի գագաթների, նիստերի և կողերի թվերը: Փորձեք յուրաքանչյուր բազմանիստի գագաթների, նիստերի և կողերի թվերի միջև գտնել այնպիսի կապ, որն օրինաչափ է դիտարկված բոլոր բազմանիստերի համար:**
Ձեր դիտարկումների հիման վրա պատասխանեք նաև հետևյալ հարցերին. ա) ուռուցիկ բազմանիստի կողերի թիվը կարո՞ղ է արդյոք հավասար լինել նրա գագաթների ու նիստերի թվերի գումարին, բ) դիտարկված բազմանիստերի շարքում կա՞ արդյոք այնպիսի ուռուցիկ բազմանիստ, որի գագաթների, նիստերի և կողերի թվերի գումարը զույգ թիվ չէ:
2. **Մեկ անգամ ևս անդրադարձեք դասագրքի ներածության մեջ ներկայացված նկար 5-ին ու դրան վերաբերող առաջադրանքին: Ուշադրությամբ դիտեք նաև նկար 131-ը: Այդ նկարները հոլանդացի տաղանդավոր գծանկարիչ Մորիս Էշերի այն գործե-**



Նկ. 131

րից են, որոնք կատարվել են մաթեմատիկական ներշնչանքով: Նկարներից յուրաքանչյուրի համար պարզեք, թե ինչպիսի՞ համաչափություններ են կիրառվել հեղինակի կողմից:
Հեղինակն այդ նկարներն անվանել է «Ցերեկ և գիշեր» (նկ. 5-ը) և «Ոլորապտույտ ջրավազաններ» (նկ. 131-ը): Իսկ ի՞նչ անվանումներ կընտրեք դուք այդ նկարների համար:

Լրացուցիչ հարցեր և խնդիրներ Գլուխ III-ի վերաբերյալ

251. Ուռուցիկ բազմանիստը տրոհել են երկու բազմանիստերի, որոնցից մեկը ուռուցիկ է: Կարո՞ղ եք պնդել, որ տրոհումից ստացված մյուս բազմանիստը ևս ուռուցիկ է: Պատասխանը հիմնավորեք օրինակով:

252. Կարո՞ղ է ուռուցիկ բազմանիստի որևէ նիստը լինել ոչ ուռուցիկ բազմանկյուն: Պատասխանը հիմնավորեք:

253. Նկարագրեք կամ մոդելով ցույց տվեք այնպիսի բազմանիստի օրինակ, որի բոլոր նիստերն ուռուցիկ բազմանկյուններ են, բայց բազմանիստը ոչ ուռուցիկ է:

254. Բացատրեք, թե ինչո՞ւ երկրաչափական մարմին չէ հետևյալ պատկերը, որը՝ **ա)** ներկայացնում է տարածության այն մասը, որը պարփակված է զույգ առ զույգ հատվող երեք հարթություններով,
   բ) ստացվել է քառանիստից, որի նիստերից մեկին կցել են մեկ այլ եռանկյուն այնպես, որ դառնա զուգահեռագիծ,
   գ) ստացվել է զուգահեռանիստից այնպես, որ այն դիտարկվում է առանց գագաթների կետերի:

255. **ա)** Պրիզմայի կողերի թիվը նիստերի թվից մեծ է 8-ով: Անվանեք այդ պրիզման:
   բ) Պրիզմայի նիստերի և գագաթների թվերի գումարը 32 է: Քանի՞ կող ունի այդ պրիզման:

256. Տրված պրիզմայի ընդհանուր կող ունեցող երկու կողմնային նիստերը ուղղանկյուններ են: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ այդ պրիզման ուղիղ պրիզմա է: Պատասխանը հիմնավորեք:

257. Պատկերեք կանոնավոր եռանկյուն պրիզմա և ցույց տվեք, որ այն կարելի է տրոհել չորս միատեսակ (հավասար հիմքեր և հավասար բարձրություններ ունեցող) կանոնավոր եռանկյուն պրիզմաների: Ցույց տվեք այդպիսի տրոհման երկու եղանակ:

258. Ուղիղ պրիզմայի հիմքը հավասարասրուն եռանկյուն է, որի սրունքը 10 սմ է, հիմքը՝ 12 սմ: Գտեք այդ պրիզմայի կողմնային կողը, եթե նրա լրիվ մակերևույթի մակերեսը 480 սմ^2 է:

259. Ուղիղ պրիզմայի կողմնային կողը 5 սմ է, իսկ հիմքը կանոնավոր վեցանկյուն է, որի փոքր անկյունագիծը 6 սմ է: Գտեք պրիզմայի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

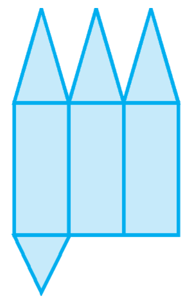
260. Թեք պրիզմայի հիմքերը 12 սմ կողմով հավասարակողմ եռանկյուններ են, իսկ կողմնային նիստերը՝ 60^0 սուր անկյունով շեղանկյուններ: Գտեք պրիզմայի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

261. Կանոնավոր քառանկյուն պրիզմայի անկյունագիծը հիմքի հարթությանը թեքված է 60^0 անկյան տակ: Գտեք հիմքերի երկու հանդիպակաց կողերով անցնող հատույթի մակերեսը, եթե հիմքի անկյունագիծը $4\sqrt{2}$ դմ է:

262. Բուրգի գագաթների, նիստերի և կողերի թվերի գումարը կարո՞ղ է լինել՝ **ա)** կենտ թիվ, **բ)** զույգ թիվ, **գ)** 4-ի բազմապատիկ թիվ: Պատասխանը հիմնավորեք:

263*. Տրված են այնպիսի բուրգ և պրիզմա, որոնք ունեն հավասար թվով գագաթներ: Պարզեք, թե դրանցից ո՞րն ունի ավելի շատ թվով՝ **ա)** նիստեր, **բ)** կողեր:

264. Նկարագրեք այն բազմանիստը, որի մակերևույթի փռվածքը պատկերված է նկար 132-ում: Դիտարկեք երկու դեպք, երբ բազմանիստը՝ **ա)** ուռուցիկ է, **բ)** ոչ ուռուցիկ է:



Նկ. 132

265. Գծագրեք կանոնավոր քառանկյուն բուրգ և դրա վրա պատկերեք այնպիսի հատույթ, որը լինի հնգանկյուն:

266*. *SABC* եռանկյուն բուրգի բոլոր կողմնային կողերը հավասար են: Բուրգի *SD* բարձրության *D* ծայրակետը *AB* հատվածի միջնակետն է: Ինչպիսի՞ եռանկյուն է բուրգի հիմքը:

267. Բուրգի հիմքը 40 սմ, 25 սմ և 25 սմ կողմերով եռանկյուն է: Բուրգի բարձրությունն անցնում է հիմքի մեծ անկյան գագաթով և հավասար է 8 սմ-ի: Գտեք բուրգի կողմնային և լրիվ մակերևույթների մակերեսները:

268. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի բարձրությունը h է և կողմնային նիստի հարթության հետ կազմում է 45^0 անկյուն: Գտեք բուրգի լրիվ մակերևույթի մակերեսը:

269. Եռանկյուն բուրգի կողմնային նիստերը հավասարասրուն եռանկյուններ են, որոնց ընդհանուր գագաթով անկյուններն ուղիղ անկյուն են: Ապացուցեք, որ այն կանոնավոր բուրգ է:

270. Կանոնավոր բուրգի հիմքը քառակուսի է, իսկ կողմնային նիստերը հավասարակողմ եռանկյուններ են: Գտեք այն անկյունը, որը հիմքի հարթության հետ կազմում է բուրգի՝ **ա)** կողմնային կողը, **բ)** կողմնային նիստը:

271. Կանոնավոր եռանկյուն բուրգի հիմքին զուգահեռ հարթությունը բուրգի բարձրությունը տրոհում է 1:2 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից: Ցույց տվեք, որ բուրգի հարթագիծն այդ հարթությամբ տրոհվում է նույն հարաբերությամբ հատվածների: Գտեք տրոհումից ստացված բուրգի և հատած բուրգի կողմնային մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը:

272. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի բարձրությունը 14 սմ է, իսկ հիմքերի կողմերը 20 սմ և 4 սմ են: Գտեք հատած բուրգի՝ **ա)** հարթագիծը, **բ)** կողմնային կողը, **գ)** կողմնային մակերևույթի մակերեսը, **դ)** հիմքերին զուգահեռ և բարձրության միջնակետով անցնող հատույթի մակերեսը:

273. Կանոնավոր քառանկյուն հատած բուրգի բարձրությունը 2 սմ է, իսկ հիմքերի կողմերը 3 սմ և 5 սմ են: Գտեք հատած բուրգի՝ **ա)** անկյունագիծը, **բ)** անկյունագծային հատույթի մակերեսը:

274. Ինչպե՞ս կգտնեք այն կետը, որը հավասարահեռ է՝ **ա)** կանոնավոր բուրգի բոլոր գագաթներից, **բ)** կանոնավոր հատած բուրգի բոլոր գագաթներից:

275. Կանոնական քառանիստի կողը 4 սմ է: Գտեք քառանիստի համաչափության առանցքի այն հատվածը, որն ընկած է քառանիստի մեջ:

276. Գտեք կանոնական ութանիստի՝ **ա)** ընդհանուր գագաթով և մի նիստի չպատկանող կողերով կազմված անկյունը, **բ)** ընդհանուր կող ունեցող նիստերի կազմած երկնիստ անկյունը:

277*. Խորանարդի գագաթներից չորսն ընտրված են այնպես, որ դրանք ներկայացնում են կանոնական քառանիստի գագաթներ: Գտեք այդ քառանիստի և խորանարդի մակերևույթների մակերեսների հարաբերությունը:

ՀԻՄՆԱՎՈՐԵՆՔ ՄԵՐ ԳԻՏԵԼԻՔՆԵՐԸ

Ապացուցումներ երկրաչափությամբ առավել հետաքրքրվողների համար

Ա-1.

Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը հատում է հարթությունը, ապա մյուսը ևս հատում է այդ հարթությունը:

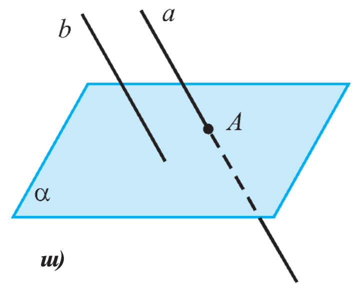
Ապացուցում. Դիցուք՝ a-ն և b-ն զուգահեռ ուղիղներ են, և a ուղիղը A կետում հատում է α հարթությունը (նկ. 133, ա):

b ուղղի և α հարթության հատվող լինելը ցույց տանք հնարավոր մյուս դեպքերի բացառման եղանակով:

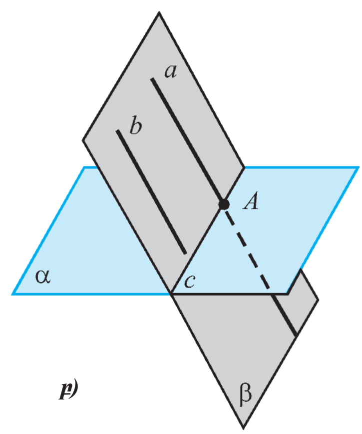
Նախ՝ b ուղիղը չի կարող ընկած լինել α հարթության մեջ, քանի որ այդ դեպքում a ուղիղը կլիներ α հարթությանը զուգահեռ, այլ ոչ թե հատող (ըստ ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշի):

b ուղղի և α հարթության զուգահեռ լինելու դեպքը ևս բացառվում է: Իսկապես, այդ դեպքում a և b զուգահեռ ուղիղներով անցնող β հարթությունը α հարթության հետ կունենար հատման գիծ՝ c ուղիղը (նկ. 133, բ), որը կլիներ b ուղղին զուգահեռ (ըստ 3.1 կետի թեորեմի): Կստացվեր, որ A կետով անցնում են b ուղղին զուգահեռ երկու ուղիղներ՝ a-ն և c-ն: Իսկ դա հակասում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին:

Քանի որ բացառվում են b ուղղի՝ α հարթության մեջ ընկած լինելու և α-ին զուգահեռ լինելու դեպքերը, մնում է եզրակացնել, որ b ուղիղը հատում է α հարթությունը, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:



ա)



բ)

Նկ. 133

Ա-2.

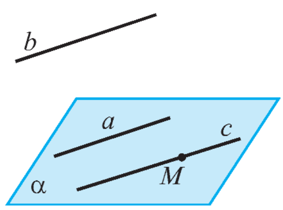
Եթե երկու ուղիղներից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է երրորդ ուղղին, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:

Ապացուցում. Ընդունենք, որ a-ն, b-ն, c-ն մի հարթության մեջ չեն ընկած (մի հարթության մեջ ընկած լինելու դեպքը մեզ հայտնի է հարթաչափությունից), և տրված է, որ $a||b$, $b||c$: Ապացուցենք, որ $a||c$:

Այն, որ a և c ուղիղները չեն հատվում, դա ակնհայտ է, քանի որ հակառակ դեպքում կստացվեր, որ b ուղղից դուրս տրված կետով անցնում են նրան զուգահեռ երկու ուղիղ՝ a-ն և c-ն:

Ցույց տանք, որ a և c ուղիղներն ընկած են մի հարթության մեջ: Դրա համար c ուղղի վրա վերցնենք կամայական M կետ և դիտենք այն α հարթությունը, որն անցնում է a ուղիղով և M կետով (նկ. 134): Ցույց տանք, որ c ուղիղն ընկած է նույն α հարթության մեջ:

Եթե ենթադրենք, որ c ուղիղն ընկած չէ α հարթության մեջ, ապա այն պետք է լիներ α հարթությանը հատող (հիշենք, որ նրանք ունեն ընդհանուր M կետ): Այդ դեպքում α հարթությունը կհատեր նաև c-ին զուգահեռ b ուղիղը (ըստ Ա-1 խնդրում ապացուցվածի): Սակայն դա հնարավոր չէ, քանի որ b ուղիղը զուգահեռ է α հարթության a ուղղին, ուրեմն նաև α հարթությանը (ըստ ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշի):



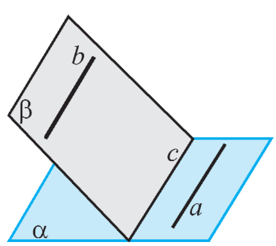
Նկ. 134

Այսպիսով՝ a և c ուղիղներն ընկած են մի հարթության մեջ և չեն հատվում, այսինքն՝ նրանք զուգահեռ են՝ $a||c$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ա-3.

Եթե տրված երկու զուգահեռ ուղիղներով անցնում են մեկական հարթություններ, և այդ հարթությունները հատվում են, ապա դրանց հատման ուղիղը զուգահեռ է տրված երկու ուղիղներից յուրաքանչյուրին:

Ապացուցում. Դիցուք՝ a և b ուղիղները զուգահեռ են, a ուղիղով անցնում է α, իսկ b ուղիղով β հարթություն, և c-ն այդ երկու հարթությունների հատման ուղիղն է (նկ. 135): Ցույց տանք, որ $c||a$ և $c||b$:



Նկ. 135

Քանի որ a ուղիղը զուգահեռ է β հարթության մեջ ընկած b ուղղին, ուրեմն, ըստ ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշի, a ուղիղը զուգահեռ է β հարթությանը: Բայց α հարթությունն անցնում է a ուղիղով և հատում է β հարթությունը c ուղիղով: Հետևաբար՝ հարթությունների հատման c ուղիղը զուգահեռ է a ուղղին՝ $c||a$ (ըստ 3.1 կետի թեորեմի):

Համանման ձևով ցույց է տրվում, որ c ուղիղը զուգահեռ է նաև b ուղղին՝ $c||b$: Պնդումն ապացուցված է:

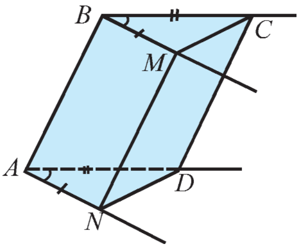
Ա-4.

Համապատասխանաբար համուղղված* կողմերով անկյունները հավասար են:

Ապացուցում. Դիցուք՝ $\angle A$-ի կողմերը համապատասխանաբար զուգահեռ և համուղղված են $\angle B$-ի կողմերին: Ապացուցենք, որ $\angle A=\angle B$: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ այդ անկյուններն ընկած չեն մի հարթության մեջ (մի հարթության մեջ լինելու դեպքը մեզ հայտնի է հարթաչափությունից):

A անկյան կողմերի վրա վերցնենք որևէ N և D կետեր, իսկ այնուհետև B անկյան համապատասխան կողմերի վրա տեղադրենք $BM=AN$ և $BC=AD$ հատվածները (նկ. 136): M և N, C և D, N և D, M և C կետերը միացնենք հատվածներով և դիտարկենք ստացված քառանկյունները:

$ABMN$ քառանկյան AN և BM հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ են և հավասար, ուրեմն՝ այն զուգահեռագիծ է: Նմանապես զուգահեռագիծ է նաև $ABCD$ քառանկյունը (AD և BC հանդիպակաց կողմերը զուգահեռ են և հավասար):



Նկ. 136

Հետևաբար՝ այդ զուգահեռագծերից յուրաքանչյուրի հանդիպակաց մյուս կողմերը ևս հավասար են և զուգահեռ. $AB=MN$ և $AB=DC$, $AB||MN$ և $AB||DC$: Ըստ հավասարության և ուղիղների զուգահեռության փոխանցականության՝ ստացվում է, որ $MN=CD$ և $MN||CD$: Նշանակում է, $MCDN$ քառանկյան երկու հանդիպակաց կողմերը հավասար են և զուգահեռ, ուրեմն՝ այն զուգահեռագիծ է: Հետևաբար՝ հավասար են նաև նրա մյուս երկու հանդիպակաց կողմերը՝ $MC=ND$:

Այժմ դիտարկենք NAD և MBC եռանկյունները: Քանի որ նրանց մյուս երկու կողմերը ևս համապատասխանաբար հավասար են (ըստ կառուցման՝ $BM=AN$ և $BC=AD$), ուրեմն՝ այդ եռանկյունները հավասար են: Դրանից բխում է, որ նրանց համապատասխան անկյունները հավասար են, այսինքն՝ $\angle NAD=\angle MBC$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

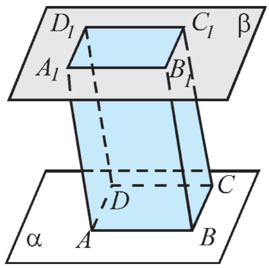
---

* Երկու ճառագայթներ կոչվում են համուղղված, եթե՝ ա) նրանք զուգահեռ են և գտնվում են սկզբնակետերով անցնող ուղղի նույն կողմի վրա (այսինքն՝ նույն կիսահարթության մեջ), կամ՝ բ) ճառագայթներից մեկն ընդգրկում է մյուսը:

Ա-5.

Զուգահեռանիստի հանդիպակաց նիստերը զուգահեռ են և հավասար:

Ապացուցում. Դիցուք՝ $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը զուգահեռանիստ է: Ապացուցենք, որ, օրինակ, $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ նիստերը հավասար զուգահեռագծեր են և ընկած են զուգահեռ հարթությունների մեջ (նկ. 137):



Նկ. 137

Դիտարկենք AB ու DC զուգահեռ ուղիղներով անցնող α հարթությունը և A_1B_1 ու D_1C_1 զուգահեռ ուղիղներով անցնող β հարթությունը (տե՛ս նկ. 137-ը): Զուգահեռագծի մյուս երկուական կողմերը ևս ընկած են համապատասխանաբար այդ հարթությունների մեջ (բացատրեք՝ ինչու): Քանի որ AB ուղիղը զուգահեռ է β հարթության մեջ ընկած A_1B_1 ուղղին (հիշենք, որ ABB_1A_1-ը զուգահեռագիծ է), ուրեմն զուգահեռ է նաև β հարթությանը (ըստ ուղղի և հարթության զուգահեռության հայտանիշի): Նմանապես AD ուղիղը ևս զուգահեռ է β հարթությանը: Այսինքն՝ α հարթության մեջ ընկած երկու հատվող ուղիղները՝ AB-ն և AD-ն զուգահեռ են β հարթությանը: Հետևաբար, ըստ երկու հարթությունների զուգահեռության հայտանիշի՝ α և β հարթությունները զուգահեռ են:

Այժմ ցույց տանք, որ $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ զուգահեռագծերի երկու կից կողմերը և դրանցով կազմված անկյունները համապատասխանաբար հավասար են. դրանից կբխի, որ այդ զուգահեռագծերը հավասար են:

Իսկապես, $AB=A_1B_1$ և $AD=A_1D_1$ (որպես զուգահեռագծերի հանդիպակաց կողմեր, իսկ $\angle BAD=\angle B_1A_1D_1$, որպես համապատասխանաբար զուգահեռ (համուղղված) կողմերով անկյուններ (տե՛ս Ա-4 խնդիրը):

Մյուս հանդիպակաց նիստերի զուգահեռությունն ու հավասարությունը ապացուցվում է նույն ձևով:

Ա-6.

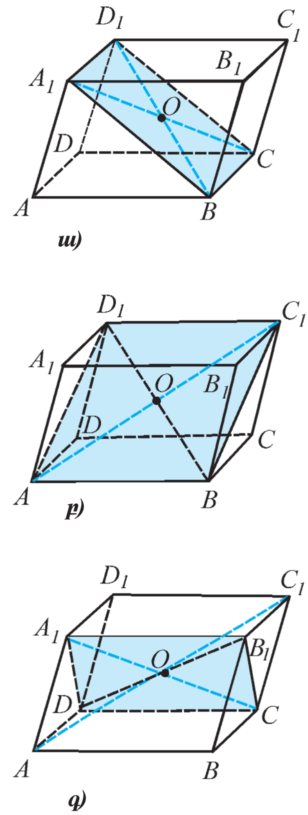
Զուգահեռանիստի անկյունագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով կիսվում են:

Ապացուցում. Դիցուք՝ $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ը զուգահեռանիստ է: Նախ դիտարկենք BCD_1A_1 քառանկյունը, որի անկյունագծերը նաև զուգահեռանիստի անկյունագծեր են (նկ. 138, ա): Քանի որ BC-ն զուգահեռ և հավասար է AD-ին, իսկ AD-ն՝ A_1D_1-ին (որպես զուգահեռագծերի հանդիպակաց կողմեր), ուրեմն՝ BC-ն զուգահեռ և հավասար է A_1D_1-ին (ըստ հավասարության և ուղիղների զուգահեռության փոխանցական հատկությունների): Հետևաբար՝ BCD_1A_1 քառանկյունը զուգահեռագիծ է: Ուրեմն՝ նրա A_1C և D_1B անկյունագծերը հատվում են մի կետում (նշանակենք՝ O) և այդ կետով կիսվում են:

Այնուհետև դիտարկենք AD_1C_1B քառանկյունը (նկ. 138, բ): Համանման դատողություններով հաստատվում է, որ այն ևս զուգահեռագիծ է, ուստի նրա AC_1 և D_1B անկյունագծերը հատվում են ինչ-որ կետում և այդ կետով կիսվում են: Բայց արդեն գիտենք, որ D_1B-ն կիսվում է O կետում: Ուրեմն՝ O կետում կիսվում է նաև AC_1 անկյունագիծը:

Եթե այժմ դիտարկենք CDA_1B_1 քառանկյունը (նկ. 138, գ), նույն կերպ ապացուցվում է, որ O կետում կիսվում է նաև B_1D անկյունագիծը:

Այսպիսով՝ զուգահեռանիստի A_1C, D_1B, AC_1 և B_1D անկյունագծերը հատվում են նույն O կետում և հատման կետով կիսվում են:



Նկ. 138

Ա-7.

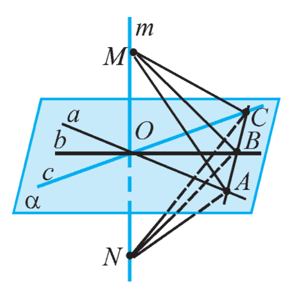
Եթե ուղիղը նույն կետում հատում է երկու ուղիղների և ուղղահայաց է դրանցից յուրաքանչյուրին, ապա այն ուղղահայաց է այդ ուղիղներով անցնող հարթությանը:

Ապացուցում. Դիցուք՝ m ուղիղը O կետում հատում է a և b ուղիղները և ուղղահայաց է դրանց: Ցույց տանք, որ m ուղիղն ուղղահայաց է a և b ուղիղներով անցնող α հարթության մեջ ընկած կամայական c ուղիղին, և դրանից կհետևի, որ m ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը (նկ. 139):

Եթե c-ն համընկնում է a կամ b ուղղի հետ, ապա պնդումն ակնհայտ է: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ c-ն չի համընկնում a և b ուղիղներին:

m ուղղի վրա վերցնենք M և N կետեր այնպես, որ O-ն լինի MN-ի միջնակետը ($MO=ON$): α հարթության մեջ տանենք մի այնպիսի ուղիղ, որը հատում է a, b, c ուղիղները՝ համապատասխանաբար A, B, C կետերում:

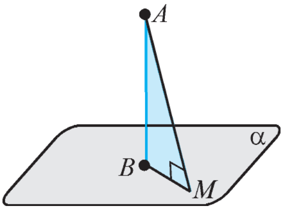
AMO և ANO ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ էջերի, ուրեմն՝ MA և NA հատվածները հավասար են՝ $MA=NA$: Համանման ձևով $MB=NB$: Դրանից հետևում է, որ ABM և ABN եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երեք կողմերի: Ուրեմն՝ $\angle MAB=\angle NAB$: Ստացվեց, որ MAC և NAC եռանկյունները հավասար են՝ ըստ երկու կողմի և դրանցով կազմված անկյան: Ուրեմն՝ $MC=NC$:


Նկ. 139

Այսպիսով՝ MNC եռանկյունը հավասարասրուն է, և OC-ն նրա միջնագիծն է: Հետևաբար՝ OC-ն այդ եռանկյան նաև բարձրությունն է՝ $OC\perp MN$, այսինքն՝ $m\perp c$: Ուրեմն՝ $m\perp\alpha$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Ա-8.

Եթե A կետը α հարթության կետերին միացնող հատվածներից փոքրագույնը AB-ն է, ապա AB-ն ուղղահայաց է α հարթությանը:

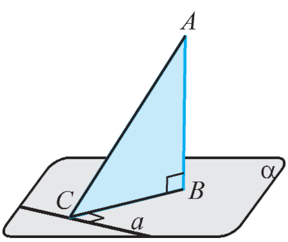


Նկ. 140

Ապացուցում. Կատարենք հակասող ենթադրություն: Ենթադրենք AB-ն ուղղահայաց չէ α հարթությանը: Այդ դեպքում A կետից α հարթությանն իջեցնենք AM ուղղահայացը (նկ. 140) և դիտարկենք AMB եռանկյունը: Այդ եռանկյունն ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի համար AM-ը էջ է, իսկ AB-ն ներքնաձիգ և, ուրեմն, $AM<AB$: Դա հակասում է այն պայմանին, որ AB-ն փոքրագույնն է այն հատվածներից, որոնք A կետը միացնում են α հարթության կետերին: Հետևաբար՝ մեր ենթադրությունը կեղծ է, ուրեմն՝ AB-ն ուղղահայաց է α հարթությանը:

Ա-9.

Հարթության մեջ թեքի հիմքով անցնող ուղիղն ուղղահայաց է թեքին այն և միայն այն դեպքում, երբ ուղղահայաց է այդ թեքի պրոյեկցիային:



Նկ. 141

Ապացուցում. Դիցուք՝ AB-ն α հարթությանը տարված ուղղահայացն է, AC-ն՝ թեքը, BC-ն՝ նրա պրոյեկցիան, իսկ a-ն α հարթության մեջ ընկած ուղիղ է, որն անցնում է C կետով (նկ. 141): Պետք է ապացուցել, որ՝ 1) եթե $a\perp BC$, ապա $a\perp AC$, 2) եթե $a\perp AC$, ապա $a\perp BC$:

1) Դիցուք՝ $a\perp BC$: Քանի որ $AB\perp\alpha$, ուրեմն՝ AB-ն ուղղահայաց է α հարթության մեջ ընկած ցանկացած ուղղին: Հետևաբար՝ $AB\perp a$: Դիտարկենք ABC հարթությունը: Ստացվում է, որ a ուղիղն ուղղահայաց է այդ հարթության մեջ ընկած AB և BC հատվող ուղիղներին, ուրեմն՝ a-ն ուղղահայաց է ABC հարթությանը, հետևաբար նաև՝ այդ հարթության մեջ ընկած AC ուղղին. $a\perp AC$:

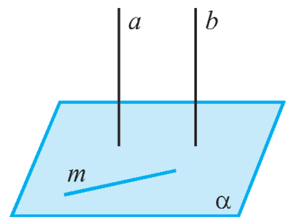
2) Դիցուք՝ $a\perp AC$: Դատողությունները կատարում ենք 1-ին դեպքի նման. քանի որ $a\perp AB$ և $a\perp AC$, ապա a-ն ուղղահայաց է ABC հարթությանը, ուրեմն նաև BC ուղղին. $a\perp BC$:

Պնդումն ապացուցված է:

Ա-10.

Եթե զուգահեռ ուղիղներից մեկն ուղղահայաց է տրված հարթությանը, ապա մյուսը ևս ուղղահայաց է այդ հարթությանը:

Ապացուցում. Դիցուք՝ a և b ուղիղները զուգահեռ են, և a ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը: α հարթության մեջ եթե վերցնենք կամայական m ուղիղ (նկ. 142), ապա a և m ուղիղների կազմած անկյունը 90^0 է (քանի որ $a \perp \alpha$): Օգտվելով համապատասխանաբար զուգահեռ (համուղղված) կողմերով անկյունների հատկությունից՝ կարող ենք եզրակացնել, որ b և m ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է a և m ուղիղների կազմած անկյանը: Այսինքն՝ b և m ուղիղների կազմած անկյունը ևս 90^0 է: Ստացվում է, որ b ուղիղն ուղղահայաց է α հարթության մեջ ընկած ցանկացած ուղղին: Դա նշանակում է, որ b ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

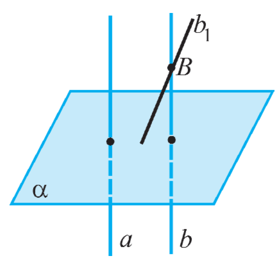


Նկ. 142

Ա-11.

Եթե երկու ուղիղներ ուղղահայաց են նույն հարթությանը, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:

Ապացուցում. Դիցուք՝ a և b ուղիղներից յուրաքանչյուրն ուղղահայաց է α հարթությանը. $a \perp \alpha$ և $b \perp \alpha$: Ենթադրենք a և b ուղիղները զուգահեռ չեն: b ուղղի վրա ընկած կամայական B կետից տանենք a ուղղին զուգահեռ b_1 ուղիղը (նկ. 143): Քանի որ $a \perp \alpha$ և $a || b_1$, ուրեմն՝ $b_1 \perp \alpha$ (տե՛ս Ա-10 խնդիրը): Ստացվում է, որ B կետից α հարթությանն իջեցրած ուղղահայացը միակը չէ, իսկ դա հակասում է ուղղահայացի միակության մասին պնդմանը (տե՛ս 8.1 կետը): Հետևաբար՝ մեր ենթադրությունը կեղծ է, ուրեմն՝ $a || b$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

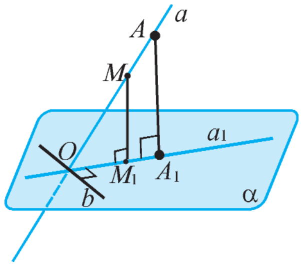


Նկ. 143

Ա-12.

Տրված հարթությանը հատվող և նրան ոչ ուղղահայաց ուղղի պրոյեկցիան այդ հարթության մեջ ուղիղ է:

Ապացուցում. Դիցուք՝ a ուղիղը O կետում հատում է α հարթությունը և նրան ուղղահայաց չէ: a ուղղի վրա վերցնենք որևէ A կետ և իջեցնենք ուղղահայաց α հարթությանը (նկ. 144): Դիտարկենք ուղղահայացի A_1 հիմքով և O կետով անցնող ուղիղը: Ցույց տանք, որ հենց դա էլ a ուղղի պրոյեկցիան է α հարթության



Նկ. 144

վրա: Դրա համար նախ ցույց տանք, որ a ուղղի կամայական M կետի M_1 պրոյեկցիան ընկած է հենց OA_1 ուղղի վրա: Իսկապես, α հարթության մեջ O կետով տանենք OA_1-ին ուղղահայաց b ուղիղը: Ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի՝ $b \perp OA$: Հետևաբար՝ $b \perp OM$ և, ուրեմն, դարձյալ ըստ երեք ուղղահայացների թեորեմի՝ $b \perp OM_1$: Քանի որ հարթության մեջ տրված կետից կարելի է ուղղին տանել միայն մեկ ուղղահայաց, ուրեմն OA_1 և OM_1 ուղիղները համընկնում են: Այսինքն՝ M_1 կետն ընկած է OA_1 ուղղի վրա: Համանման ձևով կարելի է ցույց տալ նաև, որ OA_1 ուղղի կամայական կետը a ուղղի որևէ կետի պրոյեկցիա է α հարթության մեջ: Այսպիսով, a ուղղի պրոյեկցիան α հարթության մեջ ուղիղ է, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Կրկնության հարցեր և խնդիրներ

278. Տրված են չորս կետեր: Հայտնի է, որ այդ կետերից ցանկացած երկուսով անցնող ուղիղը չի հատվում մյուս երկու կետերով անցնող ուղղին: Ապացուցեք, որ տրված չորս կետերը մի հարթության չեն պատկանում:

279. α և β հարթությունները հատվում են: Ապացուցեք, որ ցանկացած γ հարթությունը հատում է α և β հարթություններից գոնե մեկը:

280. Զուգահեռագծի անկյունագծով տարված է հարթություն: Ապացուցեք, որ մյուս անկյունագծի ծայրակետերը հավասարահեռ են այդ հարթությունից:

281. $ABCD$ քառանիստում AB=2, BC=3, BD=4, AD= $2\sqrt{5}$, CD=5: Ապացուցեք, որ BD-ն ուղղահայաց է ABC հարթությանը:

282. Նվազագույնը քանի՞ գույնի ներկ է հարկավոր ընտրել խորանարդի մակերևույթը ներկելու համար այնպես, որ հարևան նիստերը լինեն տարբեր գույնի:

283. Պատաշարն ունի միատեսակ աղյուսներ և ուզում է չափել աղյուսի անկյունագիծը՝ կատարելով մեկ չափում սանդղակավոր քանոնով: Ինչպե՞ս դա անել առանց հաշվարկներ կատարելու:

284. Կարո՞ղ է արդյոք որևէ բուրգի փռվածքը լինել քառակուսի:

285. Առավելագույնը քանի՞ հավասար կողեր կարող է ունենալ այն եռանկյուն պրիզման, որի հիմքը տարակողմ եռանկյուն է:

286. Կանոնավոր բուրգի բոլոր կողերը միմյանց հավասար են: Ի՞նչ պատկեր կարող է լինել այդպիսի բուրգի հիմքը: Պատասխանը հիմնավորեք:

287. Եռանկյան բուրգի հիմքը a և b էջերով ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի ներքնաձիգը հավասար է բուրգի կողմնային կողերին: Գտեք բուրգի բարձրությունը:

288. Քառանկյուն բուրգի հիմքի երեք կողմերն են 5 սմ, 7 սմ և 8 սմ (կից կողմերը նշված են հերթականությամբ): Գտեք հիմքի չորրորդ կողմը, եթե հայտնի է, որ հիմքին առընթեր բոլոր երկնիստ անկյունները հավասար են:

289. Առավելագույնը քանի՞ կողմ կարող է ունենալ ուռուցիկ բազմանիստի նիստը, եթե այդ բազմանիստը՝ **ա)** վեցանիստ է, **բ)** հարյուրանիստ է:

290. Արդյոք կա՞ այնպիսի ոչ ուռուցիկ բազմանիստ, որն ունի. **ա)** չորս նիստ, **բ)** հինգ նիստ:

291. Բերեք n-անիստ բազմանիստի այնպիսի օրինակ ($n \geq 4$), որում հնարավոր լինի ստանալ 3-ից մինչև n ցանկացած թվով կողմեր ունեցող հատույթներ: Նկարագրեք, թե ինչպես ստանալ այդ հատույթները:

292. $ABCA_1B_1C_1$ եռանկյուն պրիզմայում A գագաթին հարակից բոլոր հարթ անկյուններն ուղիղ անկյուն են, ընդ որում՝ A գագաթից ելնող կողերը հավասար են 3 սմ, 4 սմ և 5 սմ: Հայտնի է, որ պրիզմայի կողմնային կողը հավասար է հիմքի կողերից մեկին: Գտեք այդ պրիզմայի բարձրությունը:

293. Ուղիղ եռանկյուն պրիզման ունի միմյանց հավասար յոթ կող, որոնցից յուրաքանչյուրը 10 սմ է, իսկ հիմքի պարագիծը 32 սմ է: Գտեք պրիզմայի մակերևույթի մակերեսը:

294. Հայտնի է, որ տրված բազմանիստերի գագաթների, կողերի և նիստերի թվերի գումարը հավասար է՝ **ա)** 102-ի, **բ)** 104-ի: Որոշեք բազմանիստի տեսքը, եթե հայտնի է, որ դա պրիզմա է կամ բուրգ:

295. Գտեք 1 սմ կող ունեցող կանոնական քառանիստի մակերևույթի վրա ամենակարճ այն ճանապարհի երկարությունը, որ միացնում է հանդիպակաց կողերի միջնակետերը:

296. Գտեք միավոր խորանարդի մակերևույթի վրա ամենակարճ այն ճանապարհի երկարությունը, որ միացնում է խորանարդի հանդիպակաց գագաթները:

297. Կանոնավոր քառանկյուն բուրգի կողմնային կողը b է, իսկ գագաթին հարակից հարթ անկյունը՝ 15^0: Գտեք բուրգի մակերևույթի վրա ամենակարճ այն ճանապարհի երկարությունը, որի սկիզբն ու վերջը հիմքի նույն գագաթն է, և այն հատում ունի բոլոր կողմնային կողերի հետ:

298*. Լուծեք նախորդ խնդիրը՝ ընդունելով, որ գագաթին հարակից հարթ անկյունը α է, և դիտարկեք հնարավոր դեպքերը՝ կախված α-ից:

ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ՀԱՄԱՌՈՏ ՏԵՂԵԿԱՏՈՒ

1. Եռանկյուն (կողմերը՝ a, b, c, կողմերի հանդիպակաց անկյունները՝ α, β, γ, կիսապարագիծը՝ p, արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ R, ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r, մակերեսը՝ S, a կողմին տարված բարձրությունը՝ h_a).

$$S=\frac{1}{2}ah_a\ ,\ S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha\ ,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (Հերոնի բանաձևը),

$$r=\frac{S}{p}\ ,\qquad R=\frac{abc}{4S}\ ,$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$ (կոսինուսների թեորեմը),

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$ (սինուսների թեորեմը)։

2. Ուղղանկյուն եռանկյուն (էջերը՝ a, b, ներքնաձիգը՝ c, ներքնաձիգի վրա էջերի պրոյեկցիաները՝ a_c, b_c).

$$S=\frac{1}{2}ab\ ,\ S=\frac{1}{2}ch_c\ ,$$

$$r=\frac{a+b-c}{2}\ ,\ R=\frac{c}{2}\ ,$$

$$a^2+b^2=c^2$$ (Պյութագորասի թեորեմը),

$$\frac{a_c}{h_c}=\frac{h_c}{b_c}\ ,\ \frac{a_c}{a}=\frac{a}{c}\ ,\ \frac{b_c}{b}=\frac{b}{c}\ ,\quad a=c\sin\alpha=c\cos\beta=btg\alpha=bctg\beta\ :$$

3. Հավասարակողմ եռանկյուն.

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ r=\frac{a\sqrt{3}}{6}\ ,\ R=\frac{a\sqrt{3}}{3}\ :$$

4. Ուռուցիկ քառանկյուն (անկյունագծերը՝ d_1, d_2, անկյունագծերի կազմած անկյունը՝ φ, մակերեսը՝ S).

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi\ :$$

5. Զուգահեռագիծ (կից կողմերը՝ a, b, կից կողմերի կազմած անկյունը՝ α, a կողմին տարված բարձրությունը՝ h_a).

$$S=ah_a=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi\ :$$

6. Շեղանկյուն (կողմը՝ a, անկյունը՝ α).

$$S = ah_a = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 :$$

7. Ուղղանկյուն (անկյունագիծը՝ d).

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi :$$

8. Քառակուսի

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2} :$$

9. Սեղան (հիմքերը՝ a, b, բարձրությունը՝ h, միջին գիծը՝ ℓ).

$$\ell = \frac{a+b}{2}, \quad S = \frac{a+b}{2} h = \ell h :$$

10. Արտագծյալ բազմանկյուն (կիսապարագիծը՝ p, ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r).

$$S = pr :$$

11. Կանոնավոր բազմանկյուն (կանոնավոր n-անկյան կողմը՝ a_n, արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ R, ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը՝ r).

$$a_3 = R\sqrt{3}, \quad a_4 = R\sqrt{2}, \quad a_6 = R, \quad S = \frac{n a_n r}{2} :$$

12. Շրջանագիծ, շրջան (շառավիղը՝ R, շրջանագծի երկարությունը՝ C, շրջանի մակերեսը՝ S).

$$C = 2\pi R, \quad S = \pi R^2 :$$

13. Սեկտոր (աղեղի երկարությունը՝ ℓ , աղեղի աստիճանային չափը՝ n^0).

$$\ell = \frac{\pi R n}{180}, \qquad S = \frac{\pi R^2 n}{360} :$$

14. Եռանկյունաչափական բանաձևեր.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \left(\alpha \neq 90^0\right), \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \left(\alpha \neq 0^0, 180^0\right):$$

15. Բերման բանաձևեր.

$\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha$,	$\cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha$,	$tg(90^0-\alpha)=ctg\alpha$,
$\sin(90^0+\alpha)=\cos\alpha$,	$\cos(90^0+\alpha)=-\sin\alpha$,	$tg(90^0+\alpha)=-ctg\alpha$,
$\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$,	$\cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha$,	$tg(180^0-\alpha)=-tg\alpha$:

Պատասխաններ և ցուցումներ

Գլուխ I

4. Երբ գտնվում են մի ուղղի վրա: **5.** ա) Ոչ. կիսակասեր հետևանք 1-ին, բ) ոչ. կիսակասեր հետևանք 2-ին: **6.** ա) Ոչ, բ) այո: **8.** ա) A-ն և M-ը, բ) A և M կետերով անցնող ուղիղը: **9.** Այո, ըստ A-3 աքսիոմի: **10.** ա) Ոչ, բ) այո: **11.** 4, կամ 1, կամ անվերջ շատ: **12*.** 10: **13.** ա) Գտնվում են մի հարթության մեջ (կամ՝ խաչվող չեն), բ) խաչվող են: **14.** ա) Ճշմարիտ, բ) կեղծ, գ) ճշմարիտ: **16.** Ոչ: **17.** ա) CB ուղիղը, բ) B կետով չանցնող ցանկացած ուղիղը, գ) հնարավոր չէ: **18.** ա) Հնարավոր չէ, բ) EF-ին հատող ցանկացած ուղիղ, գ) EF-ին զուգահեռ ուղիղը: **20.** 2: **21.** ա) Այո, բ) այո, գ) այո: **22.** 70^0: **23.** 90^0, 45^0, 45^0: **24.** Խաչվող են, ա) 60^0, բ) 90^0: **25.** ա) $AC\subset ABC$, բ) հատվում են, գ) խաչվող են: **26.** Այո: **27.** ա) c-ն ընկած է հարթության մեջ, բ) c-ն ընկած է հարթության մեջ, կամ հատում է այն: **28.** Հարթություն: **29.** $CD\|\alpha$, կամ $CD\subset\alpha$: **30.** ա) Ճշմարիտ, բ) ճշմարիտ, գ) կեղծ: **31.** Հիմքերը զուգահեռ են α-ին, սրունքները՝ հատում են: **32.** Միջին գիծն ընկած է հարթության մեջ: **33.** Այո: b-ն զուգահեռ է հարթությանը կամ ընկած է նրա մեջ: **34.** *Ցուցում*: Դիտարկել a ուղիղով և M կետով անցնող հարթությունը: **35.** *Ցուցում*: Օգտվել եռանկյան միջին գծի հատկությունից և ուղղի ու հարթության զուգահեռության հայտանիշից: **36.** 2:3: **38*.** *Ցուցում*: M կետով տանել a-ին և b-ին զուգահեռ ուղիղներ: Եթե M կետն ընկած է խաչվող ուղիղներից մեկով անցնող և մյուս ուղղին զուգահեռ հարթության մեջ, ապա խնդիրը լուծում չունի: **39.** Խաչվող են կամ զուգահեռ: **40.** $a\|b$. ըստ 4.2 կետի թեորեմի: **41.** ա) Կեղծ, բ) կեղծ, գ) ճշմարիտ: **42.** ա) Ճշմարիտ, բ) կեղծ (հնարավոր է $\alpha\subset\beta$), գ) կեղծ (հնարավոր է $a\subset\alpha$), դ) կեղծ, ե) կեղծ: **44.** Զուգահեռ են: **45.** *Ցուցում*: Նկատի ունենալ, որ հատման կետերը միացնող հատվածը զուգահեռ է եռանկյան երրորդ կողմին: **46.** *Ցուցում*: Հատման գիծը զուգահեռ է AB-ին: **48*.** 10 սմ կամ 20 սմ: **49.** ա) Զուգահեռ են, բ) 60^0, գ) 4 սմ: **50*.** Զուգահեռ են: *Ցուցում*: Հիմնավորելու համար հարթությունների հատման գծի վրա վերցնել որևէ M կետ և օգտվել 34 խնդրից, ինչպես նաև զուգահեռ ուղղի միակությունից: **51.** ա) Հատվող են, բ) խաչվող են, գ) խաչվող են, դ) հատվող են, ե) խաչվող են: **52.** ա) Զուգահեռ են, բ) զուգահեռ են, գ) խաչվող են, դ) հատվող են: **54.** ա) 720^0, բ) 2160^0: **55.** ա) Զուգահեռ են, բ) խաչվող են, գ) խաչվող են, դ) զուգահեռ են, ե) զուգահեռ են, զ) զուգահեռ են, է) զուգահեռ են: **56.** 80^0: ա) Զուգահեռ են, բ) հատվում են: **58.** 36 սմ: **59.** 42 սմ: **60.** $8\sqrt{3}$ սմ^2: **61.** $4\sqrt{33}$ սմ^2: **62.** 94 սմ: **63.** 60 սմ: **66.** 20 սմ: **67.** Սեղան: **70.** Այո: **71.** 20: **72.** 12: **73.** 6: **74.** 7: **75.** 24: **76.** 3 (երբ այդ երկու ուղիղները տրված խաչվող ուղիղներից մեկին հատում են նույն կետում), 4 (երբ դրանք խաչվող ուղիղներին հատում են տարբեր կետերում): **77.** 6: **80.** *Ցուցում*: Նախ տանել խաչվող ուղիղներից մեկով և M

կետով անցնող հարթությունը և գտնել մյուս ուղղի հետ այդ հարթության հատման կետը: Խնդրի լուծում չունենալու դեպքի համար օգտվել խնդիր 38-ի ցուցումից: **81.** բ) Խաչվող են, 60^0: **83.** 12 սմ^2: **84.** *Ցուցում*: Տանել AC կամ BD անկյունագիծը և օգտվել եռանկյան միջին գծի հատկությունից: **86.** Այո: **87.** Տրված հարթություններին զուգահեռ հարթություն: **88.** 3: **89.** Ոչ: *Ցուցում*: Դիտարկել, օրինակ, որևէ կողն ընդգրկող երկու նիստերի՝ այդ կողին զուգահեռ միջին գծերով անցնող հարթությունը:

Գլուխ II

93. ա) Այո, բ) այո, գ) այո, դ) ոչ: **95.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) ոչ, դ) այո, ե) ոչ: **97.** ա) Ոչ, բ) այո: **99.** AO և OB, AO և OC, AO և BC, BO և OC, BO և AC, CO և AB: **100.** ա) Կեղծ, բ) ճշմարիտ, գ) ճշմարիտ, դ) կեղծ: **102.** Ուղղահայաց է: **103.** Ոչ: **104.** ա) Ոչ, բ) այո, գ*) այո: **105*.** Այո: *Ցուցում*: Խաչվող լինելու դեպքը դիտարկելիս ցույց տալ, որ AB-ն ուղղահայաց է a ուղիղով և AB հատվածի միջնակետով անցնող հարթությանը: **107.** 8 սմ: **108.** 12 սմ: **109.** 9 սմ, հավասար են: **110.** 20 սմ: **111.** 6 մ: **112.** $2\sqrt{2}$ մ: **113.** 4 դմ շառավիղով շրջանագիծ: **114.** 5 մ: **115.** ա) Ուղղանկյուն եռանկյուն, բ) ուղղանկյուն եռանկյուն, գ) հավասարասրուն եռանկյուն: **117.** 6 սմ: **118.** *Ցուցում*: Օգտվել երեք ուղղահայացների թեորեմից: **122.** Զուգահեռ են: **123.** Զուգահեռ են: **124.** 8 սմ: **127*.** 10 սմ^2: **128*.** *Ցուցում*: Տանել տրված երկու կետերը միացնող հատվածի միջնուղղահայաց հարթությունը և դիտարկել տրված ուղղի և այդ հարթության փոխդասավորությունը: **129*.** *Ցուցում*: Օգտվելով խնդիր 101-ից՝ նախ տանել α-ին ուղղահայաց որևէ ուղիղ, որից հետո A կետով տանել այդ ուղղին զուգահեռ ուղիղը: **130.** a ուղղի և նրան զուգահեռ α հարթության հեռավորությունը: **131.** 2 սմ: **132.** 5 սմ, 5 սմ: **133.** ա) 30^0, բ) 60^0, գ) 45^0: **134.** ա) Այո, բ) այո, գ) ոչ, դ) այո: **135.** ա) Կեղծ, բ) կեղծ, գ) ճշմարիտ: **136.** Երբ $\varphi=90^0$: **137.** ա) $4\sqrt{3}$ սմ, բ) 12 սմ: **138.** $10\sqrt{6}$ սմ: **140.** ա) Ուղղահայաց են, բ) զուգահեռ են: **141.** 12: **142.** 4 սմ: **143.** Ուղիղ անկյուն: **144.** 36^0: **145.** 13դմ: **146.** 45^0: **147.** 1/3: **148*.** 8 սմ: **149.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) ոչ, դ) ոչ, ե) այո: **150.** ա) Անվերջ շատ, բ) մեկ, գ) մեկ, դ) մեկ, ե) ոչ մի: **151.** $a\|\alpha$ կամ $a\subset\alpha$: **152.** ACD և ABC, BDM և ABC, BDM և ACD: **154.** ա) CD, A_1B_1, C_1D_1, բ) CC_1, DD_1, A_1D_1, B_1C_1, գ) AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, AD, BC, A_1D_1, B_1C_1, դ) A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1, ե) AA_1, BB_1, CC_1, DD_1: **155.** AA_1C_1C, BB_1D_1D, ABC_1D_1, A_1B_1CD, ADC_1B_1, A_1D_1CB: **156.** $\sqrt{3}$ սմ: **157.** ա) 3 սմ, բ) 8,5 սմ, գ) 7 դմ: **158.** ա) 3 սմ, բ) $\sqrt{5}$ սմ, $\sqrt{5}$ սմ, $2\sqrt{2}$ սմ: **159.** 12 սմ: **160.** $10\sqrt{2}$ սմ, 10 սմ: **161.** ա) 2 սմ, բ) $2\sqrt{2}$ սմ, գ) $2\sqrt{3}$ սմ: **162.** ա) 60^0, բ) $25\sqrt{3}$ սմ^2: **163.** 4,8 սմ: **164.** ա) $\sqrt{41}$ մ, բ) 5 մ, գ) 2,5 մ: **165.** ա) Ուղղանկյուններ, բ) ուղղանկյուններ, գ) փոխուղղահայաց են: **166.** 2,5 սմ: **167.** ա) $36\sqrt{2}$ սմ^2, բ) $18\sqrt{5}$ սմ^2, գ) $4\left(2\sqrt{3}+3\right)$ սմ: **168.** ա) $2\sqrt{2}$ սմ, բ) $6\sqrt{2}$ սմ, գ) 24 սմ: **169.** 2,6 մ: **171.** 3 սմ (երբ հատվածը չի հատում հարթությունը) և 2 սմ (երբ հատվածը հատում է հարթությունը): **172.** 6 սմ: *Ցուցում*: Նախ գտնել զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետի (այսինքն՝ AC-ի միջնակետի) հեռավորությունը հարթությունից: **174.** $2\sqrt{7}$ դմ: **176.** $3a$: **177*.** 45^0: **178*.** *Ցուցում*: Տանել տրված երկու կետերը միացնող հատվածի միջնուղղահայաց հարթությունը և դիտարկել դրա ու տրված հարթության փոխդասավորությունը: **179*.** *Ցուցում*: Օգտագործել նաև հարթաչափությունից հայտնի՝ համապատասխանաբար ուղղահայաց կողմերով անկյունների հատկությունը: **180.** 12 սմ: **182*.** 24 սմ: **183.** $5\sqrt{3}$ սմ: **184*.** 12 սմ:

185*. $\dfrac{a^2}{\cos\varphi}$, երբ $0^0<\varphi\leq45^0$, և $\dfrac{a^2}{\sin\varphi}$, երբ $45^0\leq\varphi<90^0$: **186*.** ա) 2 սմ, գ) 7,5 սմ^2:

Գլուխ III

187. Ոչ: **188.** ա) 4 գագաթ, 4 նիստ, բ) քանի որ 4-ից պակաս թվով գագաթները կգտնվեին մի հարթության մեջ: **189.** Բազմանիստը ուռուցիկ չէ: **193.** 24 կող, 16 գագաթ, 10 նիստ, 40 անկյունագիծ: **194.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) այո: **195.** ա) Այո, բ) այո, գ) ոչ: **196.** ա) 9-անկյուն, բ) 7-անկյուն, գ) 8-անկյուն, դ) 5-անկյուն բազմանկյուն: **197.** ա) Ոչ, բ) այո, գ) այո, դ) ոչ: **198.** Ուղիղ պրիզմա է, քանի որ կողմնային կողերն ուղղահայաց են հիմքերին՝ ըստ ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշի: **199.** ա) Չունի, բ) 4, գ) 10, դ) $n(n$-$3)$: **200.** «Ուղիղ պրիզմա», «կանոնավոր քառանկյուն պրիզմա»: **201.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) այո, դ) այո, ե) այո, զ) այո, է) ոչ: **202.** n=6: **203.** 420 սմ^2: **204.** 120 սմ^2 և 168 սմ^2: **205.** 168 սմ^2: **206.** $\left(6+1{,}5\sqrt{3}\right)$ կգ≈8,6 կգ: **207.** $288\sqrt{3}$ սմ^2 և $384\sqrt{3}$ սմ^2: **208.** $60\left(\sqrt{3}+1\right)$ սմ^2: **209.** ա) 304 մ^2, բ) 120 մ^2: **210.** 45^0, 45^0, 135^0, 135^0: **211.** 384 սմ^2: **212.** $8\sqrt{21}$ սմ^2: **213.** ա) 6 գագաթ, 6 նիստ, 10 կող, գ) 21 գագաթ, 21 նիստ, 40 կող: **214.** ա) 14-անկյուն բուրգ, բ) 10-անկյուն բուրգ, գ) 9-անկյուն բուրգ: **215.** 8 բուրգ, որոնցից երկուսը վեցանկյուն, վեցը՝ քառանկյուն բուրգ: **217.** $3\sqrt{3}$ սմ: **218.** $\sqrt{65}$ սմ, $\sqrt{65}$ սմ, $\sqrt{58}$ սմ, $\sqrt{58}$ սմ: **219.** $36\sqrt{3}$ սմ^2: **220.** 4,2 մ^2: **221.** 192 սմ^2 և 336 սմ^2: **222.** Այո: **223.** ա) Այո, բ) ոչ, գ) այո, դ) այո, ե*) այո: **224.** 5 սմ, $2{,}5\sqrt{3}$ սմ: **225.** ≈85854 մ^2: **226.** $0{,}44\sqrt{231}$ մ^2≈6,7 մ^2: **229.** 16: **230.** 105 սմ^2: **231.** 20 սմ^2 և 37 սմ^2: **232.** 72 մ^2 և 72 մ^2, հավասար են: **233.** ա) $5\sqrt{5}$ սմ, բ) $10\sqrt{2}$ սմ, գ) $37{,}5\sqrt{3}$ սմ^2, դ) $225\sqrt{2}$ սմ^2: **234*.** 108 սմ^2: **235.** ա) Ոչ, բ) ոչ: **236.** ա) Ոչ, բ) այո, գ) այո, դ) այո, ե) ոչ: **237.** 12 և 60: **239.** 24 գագաթ, 14 նիստ, 36 կող: **240.** Ոչ, քանի որ ոչ բոլոր նիստերն են միատեսակ բազմանկյուններ: **241.** ա) $3\sqrt{3}$ սմ, բ*) $2\sqrt{6}$ սմ: **242.** ա) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, բ) $\arccos\dfrac{1}{3}$, գ*) 90^0:

243. ա) C_1 գագաթը, բ) D_1D կողը, գ) C_1D_1DC նիստը, դ) B_1O հատվածը, ե) C_1A_1AC հատույթը: **244.** ա) D գագաթը, բ) EF կողը, գ) SC կողը, դ) SDE նիստը, ե) DF հատվածը, զ) SDA հատույթը: **245.** ա) A_1 գագաթը, բ) B_1C_1 կողը, գ) A_1C_1 հատվածը, դ) A_1B հատվածը, ե) A_1ADD_1 հատույթը: **246.** 3: **247.** $6\sqrt{2}$ սմ²: **248.** 6: **249.** $4\sqrt{2}$ սմ²: **250.** $16\sqrt{2}$ սմ: **251.** Ոչ: **252.** Ոչ: **254.** ա) Քանի որ սահմանափակ չէ, բ) քանի որ ոչ բոլոր կետերի բավականաչափ փոքր շրջակայքում կան ներքին կետեր (եռանկյան վրա կան կետեր, որոնք ո՛չ ներքին և ո՛չ էլ սահմանային կետ են այդ պատկերի համար), գ) քանի որ ոչ բոլոր սահմանային կետերն են պարունակվում: **255.** ա) 5-անկյուն պրիզմա, բ) 30: **256.** Այո: *Ցուցում*: Օգտվել ուղղի և հարթության ուղղահայացության հայտանիշից և այն փաստից, որ պրիզմայի կողմնային կողերը զուգահեռ են: **258.** 12 սմ: **259.** $60\sqrt{3}$ սմ² և $96\sqrt{3}$ սմ²: **260.** $216\sqrt{3}$ սմ² և $288\sqrt{3}$ սմ²:

261. $16\sqrt{7}$ դմ²: **262.** ա) Ոչ, բ) այո, գ) ոչ: **263*.** ա) Բուրգը, բ) բուրգը: **266*.** Ուղղանկյուն եռանկյուն է: **267.** 540 սմ² և 840 սմ²: **268.** $4\left(\sqrt{2}+1\right)h^2$:

270. ա) 45^0, բ) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$: **271.** 1:8: **272.** ա) $2\sqrt{65}$ սմ, բ) 18 սմ, գ) $96\sqrt{65}$ սմ², դ) 144 սմ²: **273.** ա) 6 սմ, բ) $8\sqrt{2}$ սմ²: **274.** *Ցուցում*: Գտնել կողմնային կողի միջնուղղահայացի հատման կետը՝ ա) բարձրությունը ընդգրկող ուղղի հետ, բ) հիմքերի կենտրոններով անցնող ուղղի հետ: **275.** $2\sqrt{2}$ սմ: **276.** ա) 90^0, բ) $180^0-\arccos\frac{1}{3}$: **277*.** $S_բ : S_{լս}=1:\sqrt{3}$:

Կրկնության հարցեր և խնդիրներ

282. Երեք: **284.** Այո: **285.** 5: **286.** Կանոնավոր եռանկյուն, քառանկյուն, հնգանկյուն: **287.** $\frac{\sqrt{3\left(a^2+b^2\right)}}{2}$: **288.** 6 սմ: **289.** ա) 5, բ) 99: **290.** ա) Ոչ, բ) այո: **291.** n-անկյուն բուրգ: **292.** 5 սմ: **293.** 416 սմ²: **294.** ա) 25-անկյուն բուրգ, բ) 17-անկյուն պրիզմա: **295.** 1 սմ: **296.** $\sqrt{5}$: **297.** b: **298*.** $\alpha<\frac{\pi}{4}$ դեպքում՝ $2b\sin2\alpha$, $\frac{\pi}{4}\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ դեպքում՝ $2b$, իսկ $\alpha\ge\frac{\pi}{2}$ դեպքը հնարավոր չէ:

Բովանդակություն

ՍԱՐԻԲԵԿ ԷԼԻԲԵԿԻ ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

10-րդ դասարանի դասագիրք

Հանրակրթական ավագ դպրոցի ընդհանուր և հումանիտար հոսքերի համար

Մասնագիտական խմբագիր՝ Լավրենտի Աղասու Մաթևոսյան

Խմբագիր՝ Ա. Ոսկանյան
Սրբագրիչ՝ Ա. Պապյան
Ձևավորումը՝ Ն. Հայրապետյանի
Լ. Ղամբարյանի
Շապիկի ձևավորումը՝ Ս. Դավիդյանի
Շարվածքը՝ Գ. Խաչատրյանի

Պատվեր՝ 836: Տպաքանակ՝ 42400:
Թուղթը՝ օֆսեթ: Չափսը՝ 70x100/16: 7.5 տպ. մամուլ:
Տառատեսակը՝ DallakTimeNew, Sovorakan:

Տպագրված է «**Տիգրան Մեծ**» հրատարակչության տպարանում